

Liceo Scientifico Statale "Leonardo da Vinci"
Via Possidonea 14 – 89125 Reggio Calabria
Anno Scolastico 2008/2009
Classe III Sezione G



Dirigente scolastico: Preside Prof.^{ssa} Vincenzina Mazzuca
Professore coordinatore del progetto: Prof. Francesco Zumbo

Progetto: Matematica, Fisica e Multimedialità
Tema: Moto rettilineo uniformemente accelerato

Lo studente:
Domenico De Lorenzo

Definiamo moto rettilineo uniformemente accelerato, il moto di un punto P su una traiettoria rettilinea con accelerazione costante, in cui dunque la velocità varia istante per istante.

Per meglio comprendere le leggi che regolano questo tipo di moto è essenziale partire dalle definizioni di velocità media e accelerazione;

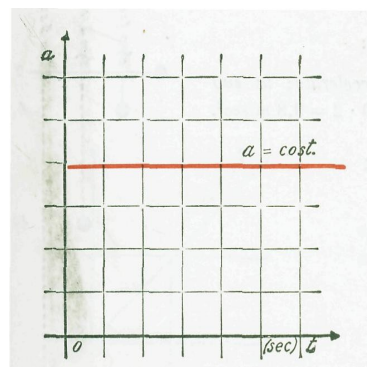
- definiamo velocità media quella velocità che ritenuta costante ci permette di percorrere spazi sempre uguali in tempi sempre uguali e secondo il SI (Sistema Internazionale) sarà misurata in m/s:

$$v_m = \frac{(v_1 + v_2)}{2} ;$$

- definiamo invece accelerazione la rapidità di variazione della velocità in funzione del tempo trascorso e nel SI viene misurata in m/s²:

$$a = \frac{(\Delta v)}{(\Delta t)} = \frac{(v_2 - v_1)}{t} ,$$

e la seguente ne è la rappresentazione grafica nel caso in cui essa sia costante:



Da ciò si può arrivare al legame tra la velocità iniziale e quella finale nel moto rettilineo uniformemente accelerato, semplicemente spostando prima il tempo

$$at = v_2 - v_1 ,$$

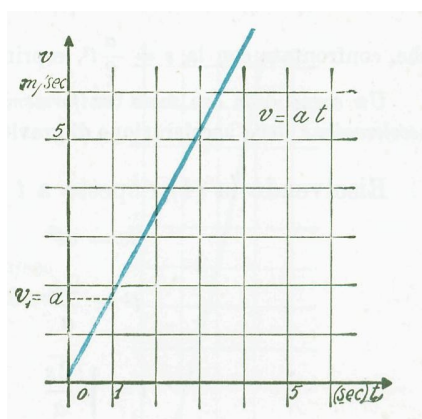
e poi la velocità iniziale

$$at + v_1 = v_2$$

dal secondo al primo membro della definizione di accelerazione, ottenendo:

$$v_2 = v_1 + at ;$$

dunque si evincerà che a parità di velocità iniziale, se l'accelerazione è maggiore di 0 $v_2 > v_1$ (moto accelerato) , se l'accelerazione è minore di 0 $v_2 < v_1$ (moto decelerato o ritardato), secondo un rapporto di proporzionalità diretta; nel caso in cui l'accelerazione fosse uguale a 0, il moto diventerebbe rettilineo uniforme; inoltre, benché con accelerazione diversa da zero la velocità vari istante per istante, tali variazioni sono direttamente proporzionali alla variazione del tempo.



Il grafico rappresenta l'accelerazione, intesa come andamento della velocità in funzione del tempo, in un moto in cui essa è ritenuta costante.

Di fondamentale importanza è la formulazione della legge oraria del moto rettilineo uniforme, che mette in correlazione lo spazio ed il tempo. Per comodità chiameremo rispettivamente v_f e v_0 la velocità finale, cioè nell'istante di tempo t_f , e iniziale, nell'istante t_0 , e s e s_0 lo spazio percorso fino all'istante t_f e quello ipotizzato come spazio percorso all'inizio del moto.

La legge oraria permetterà di trovare lo spazio percorso, conoscendo i valori di v_1 , t e a , ovvero:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 .$$

Nel caso in cui si ipotizzasse la velocità iniziale pari a 0,

$$s = \frac{1}{2} a t^2 .$$

Ovviamente non vi è un solo modo per arrivare alla formulazione di questa legge; si potrebbero per esempio eguagliare le formule della velocità, ovvero la rapidità di variazione dello spazio in relazione al tempo $v = \frac{(s - s_0)}{(t - t_0)}$, e della velocità media, già evidenziata precedentemente:

$$\frac{(s - s_0)}{(t - t_0)} = \frac{(v_1 - v_2)}{2} ;$$

dovendo però trovare la formula dello spazio, iniziamo ad isolare la s al primo membro; in particolare moltiplichiamo entrambi i membri per “ $t - t_0$ ”:

$$s - s_0 = \frac{(v + v_0)}{2} (t - t_0) ,$$

e infine spostiamo anche lo spazio iniziale, se esso venisse ipotizzato diverso da zero, al secondo membro:

$$s = s_0 + \frac{v + v_0}{2} (t - t_0) .$$

A questo punto sostituiamo a v la formula $v = v_0 + at$, ricavata dalla definizione di accelerazione;

$$s = s_0 + \frac{v_0 + at + v_0}{2} (t - t_0) .$$

Inoltre possiamo ipotizzare $t_0 = 0$, ed eseguire il restante prodotto, dopo aver sommato i due termini v_0 :

$$s = s_0 + \frac{2v_0 t}{2} + \frac{at^2}{2} ;$$

dunque:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 .$$

Possiamo ipotizzare lo spazio iniziale uguale a zero

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 ,$$

o la velocità iniziale nulla

$$s = s_0 + \frac{1}{2} at^2 .$$

Gli stessi risultati possono essere raggiunti semplicemente con la sostituzione della formula $v = v_0 + at$ all'interno della definizione di velocità media, senza doverla

confrontare con la rapidità di variazione dello spazio in funzione del tempo:

$$v_m = \frac{v + v_0}{2} \quad , \quad v_m = \frac{v_0 + at + v_0}{2} \quad ;$$

sommiamo i termini simili:

$$v_m = \frac{2v_0}{2} + \frac{at}{2}$$

e semplifichiamo dove possibile:

$$v_m = v_0 + \frac{at}{2} \quad ;$$

adesso moltiplichiamo entrambi i membri per il tempo, così da avere

$$v_m t = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad ;$$

essendo il prodotto $v \cdot t = s$:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad ,$$

dove lo spazio iniziale è ipotizzato pari a zero.

Dalla legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato si può ricavare quella del moto rettilineo uniforme, in cui l'accelerazione è pari a 0, cosicché il

termine $\frac{1}{2} at^2$ si annullerà di conseguenza e lo spazio percorso sarà uguale al

prodotto del tempo per la velocità iniziale $s = v_0 t$, dato che la velocità è costante

in modulo, e dunque $v_0 = v$: $s = vt$.

Tuttavia, per la soluzione di alcuni problemi, risulta utile trovare alcune formule più specifiche riguardanti il tempo, lo spazio, la velocità e l'accelerazione.

Se consideriamo $v_0=0$ e $s_0=0$, la legge oraria sarà $s=\frac{1}{2}at^2$;

da questa formula proviamo ad isolare il tempo:

$$at^2=2s \ ;$$

$$t^2=\frac{2s}{a} \ ;$$

$$t=\pm\sqrt{\frac{2s}{a}} \ ;$$

poiché però non ha senso parlare di tempo negativo:

$$t=+\sqrt{\frac{2s}{a}} \ ;$$

sostituiamo la formula dell'accelerazione $a=\frac{v_f-v_i}{t}$:

$$t=\sqrt{\frac{2s}{\frac{v_f-v_i}{t}}} \ ; \quad t=\sqrt{\frac{2st}{v_f-v_i}} \ ;$$

eleviamo al quadrato ambi i membri:

$$t^2=\frac{2st}{v_f-v_i} \ ;$$

dividiamo infine tutto per t , così da avere

$$t=\frac{2s}{v_f-v_i} \ ,$$

per poter trovare il tempo trascorso durante il moto senza conoscerne l'accelerazione.

Inoltre abbiamo la possibilità di trovare lo spazio, alternativamente alla legge oraria, senza conoscere il tempo trascorso dall'inizio del moto, partendo proprio

dall'equazione $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ e sostituendo $t = \frac{v_f - v_0}{a}$;

$$s = v_0 \left(\frac{v_f - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v_f - v_0}{a} \right)^2 ;$$

sviluppiamo il quadrato:

$$s = v_0 \left(\frac{v_f - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v_f^2 + v_0^2 - 2v_f v_0}{a^2} \right)$$

e svolgiamo i prodotti $v_0 \left(\frac{v_f - v_0}{a} \right)$ e $\frac{1}{2} a \left(\frac{v_f^2 + v_0^2 - 2v_f v_0}{a^2} \right)$;

$$s = \frac{v_f v_0 - v_0^2}{a} + \left(\frac{v_f^2 + v_0^2 - 2v_f v_0}{2a} \right) ;$$

eseguiamo il minimo comune multiplo:

$$s = \frac{2v_f v_0 - 2v_0^2}{2a} + \frac{v_f^2 + v_0^2 - 2v_f v_0}{2a} ;$$

sommiamo:

$$s = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a} .$$

In quest'ultima formula notiamo che possiamo trovare lo spazio percorso anche senza conoscerne il tempo, benché, così come nella legge oraria, siano necessari i valori di velocità finale e iniziale e dell'accelerazione.

Partendo dall'ultimo passaggio si può facilmente ricavare la formula della velocità:

$$v_f^2 = \frac{v_0^2}{2as} ;$$

estraiamo la radice di entrambi i membri:

$$v_f = \pm \sqrt{2as + v_0^2} ;$$

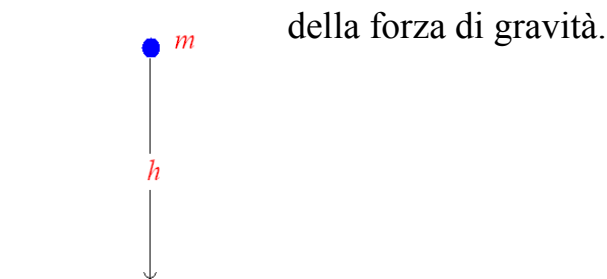
a questo punto possiamo osservare che non ha senso parlare di velocità negativa a meno che il corpo non percorra la stessa traiettoria in senso opposto.

Infine se ripartiamo dalla formula $s = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a}$, isoliamo al primo membra

l'accelerazione, con il risultato $a = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2s}$;

anche in questo caso non ci è necessario conoscere il tempo trascorso.

Un particolare caso di moto rettilineo uniformemente accelerato è rappresentato dalla caduta dei gravi, ovvero corpi che da un' altezza h cadono a terra per effetto



In questo caso la terra attira con forza costante il grave verso il basso, cosicché anche l'accelerazione sarà costante, se trascuriamo le forze d'attrito; questa accelerazione viene chiamata accelerazione di gravità, è indicata con g e varia a seconda del luogo in cui il corpo si trova.

Poiché l'accelerazione è costante e la traiettoria di caduta del grave è rettilinea, varranno le stesse formule del moto rettilineo uniformemente accelerato, anche se si deve fare una differenziazione nel caso in cui il corpo venga lasciato cadere verso il basso o venga lanciato verso l'alto, seguendo comunque una traiettoria rettilinea. Nel primo caso accelerazione e velocità hanno lo stesso segno e sono direttamente proporzionali, cosicché un corpo che cade con velocità iniziale pari a 0, arriva al suolo con una velocità finale sicuramente maggiore di quella avuta all'inizio del moto; nel secondo caso accelerazione e velocità hanno verso opposto, essendo non direttamente, bensì inversamente proporzionali, cosicché il corpo raggiunge la massima altezza con velocità pari a 0. Adatto infine le formule significative precedentemente elencate alla caduta dei gravi:

1. legge oraria: $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$

2. tempo trascorso: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

3. spazio percorso indipendente dal tempo: $h = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2g}$

4. velocità finale: $v_f = \pm \sqrt{2gh + v_0^2}$

5. accelerazione: $g = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2h}$.