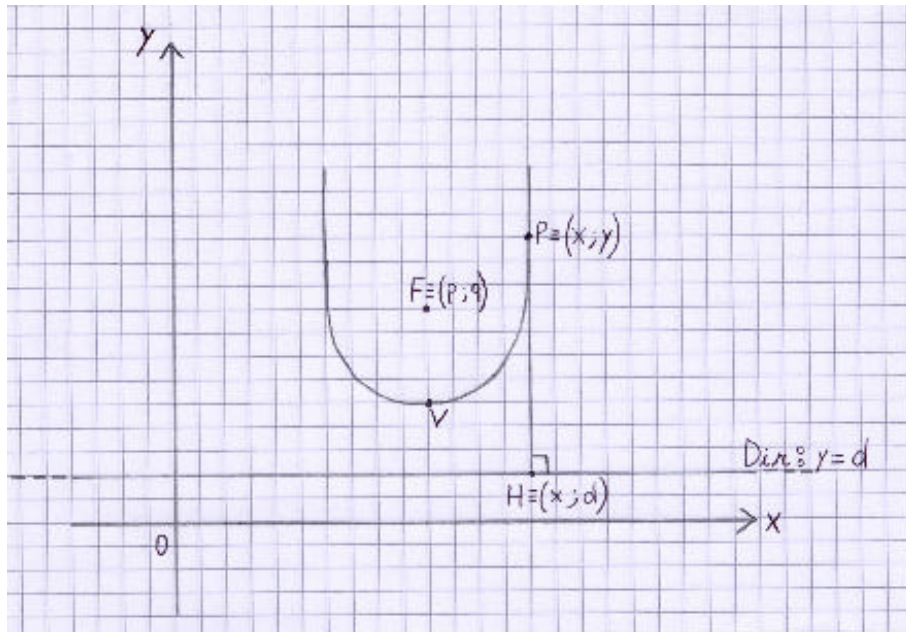


LA PARABOLA

Definizione:

Si dice parabola il luogo geometrico dei punti del piano, equidistanti da un punto fisso, detto fuoco, e da una retta fissa, detta direttrice.

Dimostrazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e con la direttrice parallela all'asse x.



F = Il fuoco che non può mai appartenere o essere esterno alla parabola.

P = Punto mobile che appartiene alla parabola.

Come si arriva all'equazione canonica della parabola:

$PF = PH$ da cui $\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = |y-d|$ (Formula della distanza)

Si elevano entrambi i membri al quadrato:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = (y-d)^2$$

Sviluppando i quadrati:

$$x^2 + p^2 - 2px + y^2 + q^2 - 2qy = y^2 + d^2 - 2dy$$

Si elimina il monomio y^2 e si portano al primo membro i polinomi che contengono la y :

$$-2qy + 2dy = -x^2 - p^2 + 2px - q^2 + d^2$$

Moltiplicando per (-1) entrambi i membri:

$$2qy - 2dy = x^2 + p^2 - 2px + q^2 - d^2$$

Raccogliendo al primo membro (2y):

$$2y(q - d) = x^2 - 2px + (p^2 + q^2 - d^2)$$

Dividendo entrambi i membri per $2(q - d)$:

$$\frac{2y(q-d)}{2(q-d)} = \frac{1}{2(q-d)}x^2 + \frac{-2p}{2(q-d)}x + \frac{p^2+q^2-d^2}{2(q-d)} \text{ da cui } y = ax^2 + bx + c \text{ (Equazione canonica della parabola)}$$

a b c

I coefficienti della parabola si possono, quindi, calcolare così:

$$a = \frac{1}{2(q-d)} \quad b = \frac{-2p}{2(q-d)} \quad c = \frac{p^2+q^2-d^2}{2(q-d)}$$

La parabola può assumere varie posizioni. Quando $a > 0$, la parabola avrà la concavità rivolta verso l'alto; se invece $a < 0$, y avrà la concavità rivolta verso il basso.

Come disegnare la parabola:

Avendo l'equazione della parabola di questo tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

si calcola il determinante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

e successivamente si applicano le seguenti formule:

$$p = -\frac{b}{2a} \quad q = \frac{1-\Delta}{4a} \quad d = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

perciò:

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right) \text{ e l'asse di simmetria (As : } x = p) \text{ avrà equazione As : } x = -\frac{b}{2a}$$

Successivamente bisogna dare la definizione di vertice:

Il vertice di una parabola è il punto di incontro tra l'asse di simmetria e la parabola stessa.

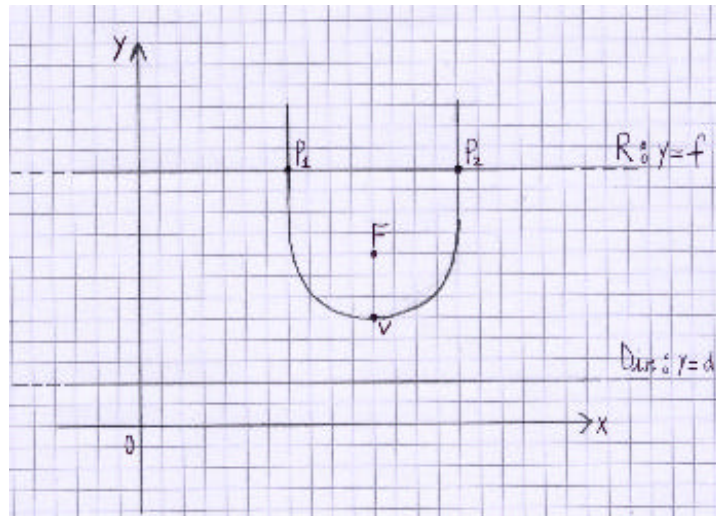
Per poter disegnare la parabola dobbiamo anche trovare le coordinate del vertice che sono le seguenti:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Adesso dobbiamo trovare una retta, che sia al di sopra della concavità, attribuendole un valore a caso. ($R: y = f$)

Dopo di ciò, mettiamo a sistema l'equazione della parabola e di questa retta.

Le coordinate dei punti che otterremo saranno i punti della retta che si intersecano con la parabola, dandole forma.



Ricerca delle tangenti ad una parabola

Conoscendo l'equazione di una parabola, del tipo $y: y = ax^2 + bx + c$, è possibile calcolare le equazioni delle tangenti, passanti per un punto $P = (x; y)$.

Se il punto P appartiene alla parabola, si troverà una sola tangente; invece se P è esterno alla parabola (e non appartiene, quindi, alla concavità), verranno trovate due rette tangenti.

Inoltre la tangente ad una curva può essere definita asintoto quando i suoi punti tendono all'infinito; l'equazione dell'asintoto si trova mettendo a sistema l'equazione della parabola e quella classica della retta ($y = mx + q$).

Il metodo della ricerca delle tangenti è uguale per ogni tutte le curve: si devono mettere a sistema l'equazione della curva e l'equazione del fascio proprio di rette, passanti per P .

Supponiamo di avere una parabola di equazione $y: y = 2x^2 - 3x - 8$ e di voler trovare le tangenti per il punto $P = (-3; 8)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 2x^2 - 3x - 8 \\ y - 8 = m(x + 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2x^2 - 3x - 8 \\ y = m(x + 3) + 8 \end{array} \right\}$$

⇓ sostituiamo nell'equazione della parabola

$$2x^2 - 3x - 8 - m(x + 3) - 8 = 0$$

⇓ ordiniamo secondo x^2

$$2x^2 + (-m - 3)x + (-3m - 16) = 0$$

Adesso, come in una normale equazione di 2° grado, calcoliamo il discriminante, ma lo porremo uguale a zero, per rispettare la condizione di tangenza:

$$\Delta = (-m - 3)^2 - 4(2)(-3m - 16) = 0$$

$$m^2 + 9 + 6m + 24m + 128 = 0$$

$$m^2 + 30m + 137 = 0$$

A questo punto, so può calcolare $\frac{\Delta}{4}$:

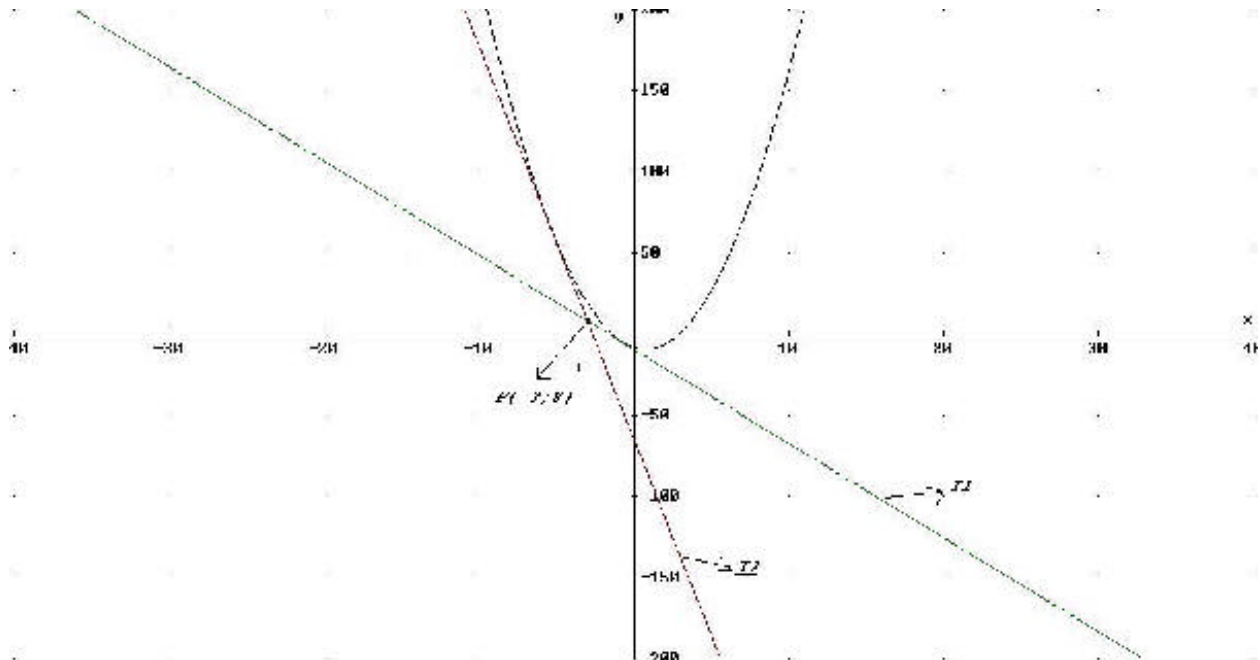
$$\frac{\Delta}{4} = (15)^2 - 137 = 225 - 137 = 88$$

$$m_{1,2} = \frac{-15 \mp \sqrt{88}}{1} \Rightarrow m_1 = -15 - 2\sqrt{22} \simeq -24,2 = -\frac{121}{5} \quad m_2 = -15 + 2\sqrt{22} \simeq -5,8 = -\frac{29}{5}$$

Le due soluzioni (m_1 e m_2) saranno i coefficienti angolari delle due rette tangenti (T_1 e T_2): perciò i due coefficienti angolari verranno sostituiti nell'equazione del fascio proprio:

$$T_1 : y = -\frac{121}{5}x - \frac{363}{5} + 8 \Rightarrow T_1 : y = -\frac{121}{5}x - \frac{323}{5}$$

$$T_2 : y = -\frac{29}{5}x - \frac{87}{5} + 8 \Rightarrow T_2 : y = -\frac{29}{5}x - \frac{47}{5}$$



Secondo tipo di parabola

Definizione di parabola:

Definiamo parabola il luogo geometrico di punti tali che la distanza tra un punto fisso scelto a caso e appartenente alla parabola e il fuoco è uguale alla distanza tra il punto fisso scelto e la direttrice.

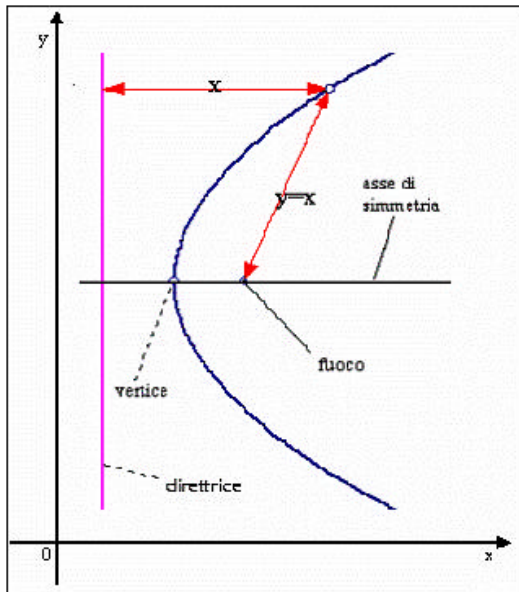
Dimostrazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x e con direttrice parallela

all'asse y:

Definiamo asse di simmetria alla nostra parabola la perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco.

Definiamo vertice il punto d'incontro tra la parabola e l'asse di simmetria della stessa.

Differenze con la parabola avente AS//asse y e direttrice//asse x



- Equazione della parabola:

$$x = ay^2 + by + c$$

-Equazione direttrice:

$$x = d = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

-Il fuoco e il vertice avranno coordinate opposte alla parabola con asse di simmetria parallela all'asse y e con direttrice parallela all'asse x:

$$F = (q, p) = \left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$$

$$V = \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$$

L'asse di simmetria poiché passa per il fuoco avrà la stessa coordinata y dello stesso:

$$As : y = -\frac{b}{2a}$$

Equazioni dello sdoppiamento per la parabola

Per trovare le tangenti ad una parabola, che passano per un punto che appartiene alla parabola, esiste due equazioni dello sdoppiamento, rispettivamente per entrambe le tipologie di parabola.

Per le parabole che hanno equazione $y = ax^2 + bx + c$, si userà la seguente equazione dello sdoppiamento:

$$\frac{y-y_0}{2} = a(x \cdot x_0) + b\left(\frac{x+x_0}{2}\right) + c$$

Si può arrivare a questa formula, semplicemente mettendo a sistema l'equazione della parabola e l'equazione del fascio proprio:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{array} \right\}$$

Per le parabole che hanno equazione $x = ay^2 + by + c$, invece, si deve applicare un'altra formula:

$$\frac{x+x_0}{2} = a(y \cdot y_0) + b\left(\frac{y+y_0}{2}\right) + c$$

La formula, appena indicata, si può trovare con il medesimo metodo.

1a tipologia di problemi sulla parabola

Trovare la parabola noti tre punti appartenenti ad essa.

Per trovare l'equazione di una parabola sapendo le coordinate di tre punti appartenenti ad essa basta mettere a sistema le tre equazioni di parabole in cui è stato imposto il passaggio per uno di quei punti, ovvero in cui si sostituiscono a x e a y rispettivamente le ascisse e le ordinate dei tre punti. Ad esempio dati i punti $A = (3; 2)$, $B = (8; 3)$ e $C = (7; -2)$; se la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse y , $y = ax^2 + bx + c$, si avranno le seguenti equazioni a sistema:

$$A) \quad 2 = a(3)^2 + b(3) + c$$

$$B) \quad 3 = a(8)^2 + b(8) + c$$

$$C) \quad -2 = a(7)^2 + b(7) + c$$

Se invece l'asse di simmetria è parallelo all'asse x , $x = ay^2 + by + c$, si avranno le seguenti equazioni:

$$A) \quad 3 = a(2)^2 + b(2) + c$$

$$B) \quad 8 = a(3)^2 + b(3) + c$$

$$C) \quad 7 = a(-2)^2 + b(-2) + c$$

In cui le incognite sono a, b, c .

2a tipologia di problemi sulla parabola

Come trovare l'equazione di una parabola, di tipo $y = ax^2 + bx + c$, conoscendo le coordinate del vertice e quelle del fuoco.

$$V = (2; 5) \text{ e } F = (2; \frac{21}{4})$$

Sapendo che il vertice si trova in una posizione di mezz'aria tra il fuoco e la retta direttrice, possiamo trovare l'ordinata della direttrice stessa e, quindi, la sua equazione. Calcoleremo quindi l'ordinata ricercata con una semplice sottrazione:

$$y_{Dir} = y_D - (y_F - y_V) = 5 - (\frac{21}{4} - 5) = \frac{19}{4}$$

⇓

$$Dir : y = \frac{19}{4}$$

L'ordinata della direttrice corrisponde, ovviamente, all'ordinata del punto H che appartiene ad essa. In questo modo possiamo arrivare all'equazione della parabola in questione, ripercorrendo la dimostrazione, fatta in base alla definizione di parabola.

$$PF = PH \Rightarrow \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = |y-d|$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-\frac{21}{4})^2} = |y-\frac{19}{4}|$$

⇓ Eleviamo entrambi i membri al quadrato

$$(x-2)^2 + (y-\frac{21}{4})^2 = (y-\frac{19}{4})^2$$

⇓ E adesso sviluppiamo i quadrati

$$x^2 + 4 - 4x + y^2 + \frac{441}{16} - \frac{21}{2}y = y^2 + \frac{361}{16} - \frac{19}{2}y$$

⇓ Eliminiamo y^2 e portiamo al primo membro i monomi con la y

$$\frac{19}{2}y - \frac{21}{2}y = -x^2 + 4x - 4 - \frac{441}{16} + \frac{361}{16}$$

$$(\frac{19}{2} - \frac{21}{2})y = -x^2 + 4x + (-4 - \frac{441}{16} + \frac{361}{16})$$

$$(-1)y = -x^2 + 4x + (\frac{-64-441+361}{16})$$

$$-y = -x^2 + 4x - 9$$

$$y = x^2 - 4x + 9$$

3a tipologia di problemi sulla parabola

Determinare l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x, passante per un punto $A = (5; 6)$ e conoscendo le coordinate del vertice $V = (3; 9)$.

$$x = ay^2 + by + c$$

$$V = (-\frac{a}{4a}; -\frac{b}{2a})$$

Troveremo a, b e c risolvendo un sistema di tre equazioni:

$$\text{-Prima condizione: } -\frac{b}{2a} = 9$$

-Seconda condizione: $-\frac{\Delta}{4a} = 3$

otterremo la terza condizione sostituendo le coordinate x ed y del punto (A) nell'equazione della parabola:

-Terza condizione: $5 = 36a + 6b + c$

mettendo a sistema le tre condizioni troveremo a, b e c che dovranno poi essere sostituiti nell'equazione della parabola: $x = ay^2 + by + c$.

4a tipologia di problemi sulla parabola

Determinare l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, note le coordinate del vertice $V = (2; 7)$ e l'equazione della direttrice $y = 4$.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Direttrice:

Vediamo quali sono le tre condizioni necessarie per trovare a, b e c

-Prima condizione: $-\frac{b}{2a} = 2$

-Seconda condizione: $-\frac{\Delta}{4a} = 7 \Rightarrow -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 7$

-Terza condizione: $-\frac{1+\Delta}{4a} = 4 \Rightarrow -\frac{1+b^2-4ac}{4a} = 4$

mettendo a sistema le tre equazioni troveremo a, b e c che dovranno poi essere sostituiti nell'equazione della parabola: $y = ax^2 + bx + c$.

5a tipologia di problemi sulla parabola

Trovare l'equazione della parabola ($\gamma : y = ax^2 + bx + c$), avente asse di simmetria parallelo all'asse y; che passa per i punti $P_1 = (-1; 1)$ e $P_2 = (2; 1)$ ed è tangente alla retta $R : y = x + 3$.

Per procedere alla ricerca dei coefficienti della parabola in questione, bisogna determinare tre condizioni, utilizzando i dati a disposizione: il passaggio per P_1 , il passaggio per P_2 e, infine, la condizione di tangenza con la retta R.

Mettiamo a sistema queste tre condizioni per calcolare i coefficienti a, b, e c:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^a : 1 = a(-1)^2 + b(-1) + c \\ 2^a : 1 = a(2)^2 + b(2) + c \\ 3^a : \left\{ \begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ y = x + 3 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La condizione di tangenza si può rendere risolvendo un sistema tra}$$

l'equazione di γ e di R:

$$x + 3 = ax^2 + bx + c; \Rightarrow \text{ordiniamo per } x^2 \Rightarrow ax^2 + (b-1)x + (c-3) = 0$$

Adesso calcoliamo il discriminante, per farlo, poi, uguale a zero (condizione di tangenza):

$$\Delta: (b-1)^2 - 4a(c-3) = 0 \quad ; \quad b^2 + 1 - 2b - 4ac + 12a = 0 \quad ; \quad b^2 - 2b - 4ac + 12a + 1 = 0 \quad (3^a \text{ condizione})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b + c - 1 = 0 \\ 4a + 2b + c - 1 = 0 \\ b^2 - 2b - 4ac + 12a + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = a + c - 1 \\ c = -4a - 2b + 1 \\ b^2 - 2b - 4ac + 12a + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = a - 4a - 2b + 1 - 1 \\ c = -4a - 2b + 1 \\ b^2 - 2b - 4ac + 12a + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -b \\ c = -4a - 2b + 1 \\ b^2 - 2b - 4ac + 12a + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -b \\ c = 2b - 1 \\ b^2 - 2b - 4(-b)(2b - 1) + 12(-b) + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -b \\ c = 2b - 1 \\ b^2 - 2b + 8b^2 - 4b - 12b + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 9b^2 - 18b + 1 = 0 \Rightarrow \quad \frac{\Delta}{4} = (-9)^2 - (9)(-1) = 90$$

$$b_{1,2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{10}}{9}$$

$$b_1 = \frac{9-3}{9} \simeq -0,03 \quad b_2 = \frac{9+3}{9} \simeq 2,03$$

Due soluzioni $\Rightarrow$ Due parabole che si attengono ai dati

1^a parabola (secondo b_1) 2^a parabola (secondo b_2)

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0,03 \\ c = -1,06 \\ b = -0,03 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -2,03 \\ c = 3,06 \\ b = 2,03 \end{array} \right\}$$

$\Downarrow \Downarrow$

$$\gamma_1 : y = \frac{3}{100}x^2 - \frac{3}{100}x - \frac{53}{50} \quad \gamma_2 : y = -\frac{203}{100}x^2 + \frac{203}{100}x + \frac{153}{50}$$

6a tipologia di problemi sulla parabola

Trovare l'equazione della parabola ($y : y = ax^2 + bx + c$), avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, con direttrice di equazione $y = \frac{37}{4}$, che passa per il punto $A = (0; -7)$.

Per calcolare l'equazione della parabola in questione, ricerchiamo i coefficienti con tre condizioni, determinate dai dati:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^a : -\frac{b}{2a} = 4 \\ 2^a : -\frac{1+b^2-4ac}{4a} = \frac{37}{4} \\ 3^a : -7 = a(0)^2 + b(0) + c \end{array} \right\}$$

$$1^a : \text{Eq. asse di simmetria } (x = -\frac{b}{2a})$$

$$2^a : \text{Eq. direttrice } (y = -\frac{1+b^2-4ac}{4a})$$

$$3^a : \text{Passaggio per il punto A}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = -8a \\ \frac{1+b^2-4ac}{4a} + \frac{37}{4} = 0 \\ c = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Troviamo } a, \text{ sostituendo } b \text{ e } c \Rightarrow \frac{1+(-8a)^2-4a(-7)}{4a} + \frac{37}{4} = 0 \Rightarrow \frac{1+64a^2+28a+37a}{4a} = 0$$

$$64a^2 + 65a + 1 = 0$$

$$\Delta = (65)^2 - 4(64)(1) = 3969$$

$$a_{1,2} = \frac{-65 \pm \sqrt{3969}}{128} \Rightarrow a_1 = \frac{-65-63}{128} = -1 \quad a_2 = \frac{-65+63}{128} = -\frac{1}{64}$$

Con due soluzioni avremo l'equazione di due parabole:

$\gamma_1 \quad \gamma_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 8 \\ c = -7 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{1}{64} \\ b = \frac{1}{8} \\ c = -7 \end{array} \right\}$$

$\Downarrow \Downarrow$

$$\gamma_1 : y = -x^2 + 8x - 7 \quad \gamma_2 : y = -\frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{8}x - 7$$