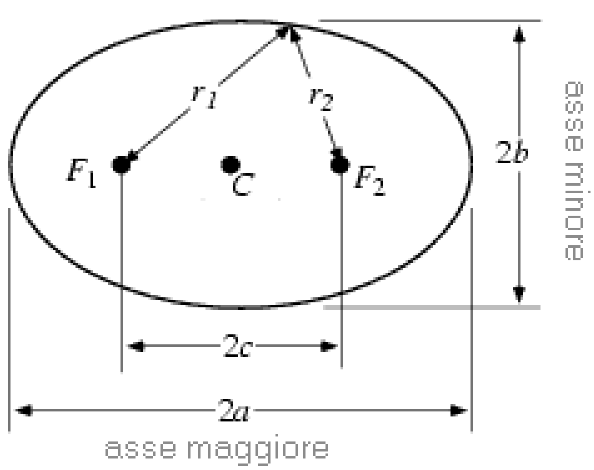
# Ellisse

DEF*: "**il luogo dei punti la cui somma delle distanze da due punti dati detti fuochi è costante**"*;

- CONSIDERAZIONI:

*Il punto **P** appartiene all'ellisse se, e solo se, la distanza del punto **P** dal fuoco **F1** più la distanza del punto **P** dal fuoco **F2** è costante cioè: **PF1+PF2=k**. Se il punto **P** che appartiene all'ellisse ha coordinate generiche **x** e **y** allora si può ricavare l'equazione dell'ellisse in forma canonica, nel caso che i due fuochi giacciano sull'asse **X** oppure sull'asse **Y**, essa è: $((x^2)/(a^2))+((y^2)/(b^2))=1$ dove **a** è la misura del semiasse dell'ellisse che giace sull'asse **X**, mentre **b** è la misura del semiasse dell'ellisse che giace sull'asse **Y**. Poiché **a** e **b** sono misure di segmenti allora sia **a** che **b** devono essere positivi e se **a** è maggiore di **b** allora l'ellisse ha l'asse maggiore, chiamato anche asse focale perché su di esso giacciono i fuochi, sull'asse delle **x**, mentre se **a** è minore di **b** allora l'asse maggiore giace sull'asse **Y**.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



✓ Per trovare l'equazione dell'ellisse consideriamone la definizione: prendiamo un punto generico **P(x,y)** ed imponiamo che la somma delle distanze di **P** dai due punti fissi **F1 (c,0)** ed **F2 (-c,0)** sia uguale a **2a**;

***PF1 + PF2 = 2a***

1. Applico la formula della distanza fra due punti nel piano ed ottengo;

$$\sqrt{(x-c)(x-c)+y^2} + \sqrt{(x-c)(x-c)+y^2} = 2a$$

2. E' un' equazione irrazionale quindi isolo una radice;

$$\sqrt{(x-c)(x-c)+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)(x-c)+y^2}$$

3. elevo al quadrato da entrambe le parti dell'uguale;

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)(x-c)+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

4. Sommo i termini simili e isolo la radice prima dell'uguale;

$$4a\sqrt{(x-c)(x-c)+y^2} = 4a^2 - 4cx$$

5. Divido tutti i termini per 4;

$$a\sqrt{(x-c)(x-c)+y^2} = a^2 - cx$$

6. Elevo a quadrato da entrambe le parti;

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

7. moltiplico a^2 per i termini in parentesi;

$$a^2x^2 - 2a^2x^2 - 2a^2cx + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

8. Termini con la x e la y prima dell'uguale, gli altri dopo l'uguale;

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2y^2 + 2a^2cx - c^2x^2 = a^4 - a^2c^2$$

9. tolgo i due termini uguali e di segno opposto;

$$a^2x^2 + a^2y^2 - c^2x^2 = a^4 - a^2c^2$$

10. metto in evidenza la x^2 prima dell'uguale ed a^2 dopo l'uguale;

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 + a^2(a^2 - c^2)$$

11. ora pongo a^2 – c^2 = b^2 posso farlo perche' a > c;

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

12. divido tutti i termini per a^2b^2;

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

13. Semplifico ed ottengo l'equazione canonica dell'ellisse;

$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; (a \geq b > 0)$$

- Se $a = b$ l'equazione dell'ellisse diventa:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ossia una ***circonferenza*** di centro l'origine e raggio $a$

# REGIONE IN CUI SI TROVA LA CURVA

L'equazione dell'ellisse si può anche scrivere nel modo seguente:

$$x^2 = a^2[1 - \frac{y^2}{b^2}]$$

Poichè $1 \geq \frac{y^2}{b^2} \geq 0$ i valori di $\mathcal{C}$ lungo l'asse **x** variano tra **a** e **−a** ; analogamente le **y** variano tra **b** e **-b**. Allora il grafico dell'ellisse è contenuto nell'insieme costituito dai punti **P(x,y)** del piano tali che:

$|x| \leq a$ **v** $|y| \leq b$ cioè nel rettangolo delimitato dalle rette di equazioni:

$$x = \pm a, y = \pm b$$

I punti di coordinate $(\pm a, 0)$ e $(\pm b, 0)$ sono i punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con gli assi cartesiani. Tali punti si chiamano ***vertici*** dell'ellisse.

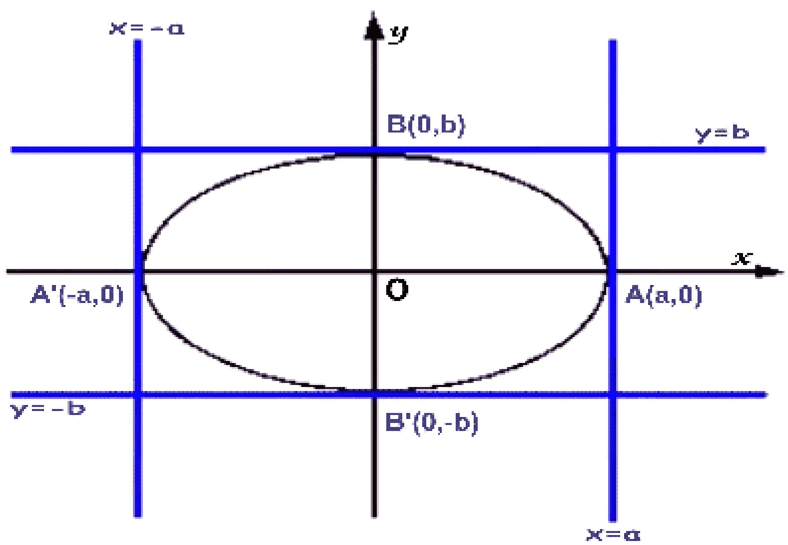



**Figura:** La regione delimitata dalle rette è la regione dove si svolge il grafico.

# SIMMETRIE

Se ***P= (u,v)*** appartiene a $\mathcal{C}$, questa contiene anche i punti ***(u,-v),(-u,v),(-u,-v)***. Infatti le variabili **x** e **y** compaiono soltanto al quadrato, quindi l'ellisse è una curva simmetrica, sia rispetto l'asse **x**, sia rispetto all'asse **y**, e quindi anche simmetrica rispetto all'origine.

- Gli assi **x,y** sono gli **assi di simmetria** per $\mathcal{C}$.
- L'origine degli assi è il **centro di simmetria** per $\mathcal{C}$, detto **centro di** $\mathcal{C}$.
- I quattro segmenti di estremi l'origine e uno dei vertici sono detti **semiassi**. I numeri **a,b** sono le **lunghezze dei semiassi**.

Se $a = b$, cioè se $\mathcal{C}$ è una circonferenza di centro l'origine e raggio $a$, ***ogni asse per l'origine é asse di simmetria.***

# FUOCHI DELL'ELLISSE

Posto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ i punti di coordinate **(±c,0)** sono i fuochi dell'ellisse. Il numero $e = \frac{c}{a}$ è la sua ***eccentricità*** . Si ha sempre **0 ≤ e ≤ 1**

Se $e = 0$, $\mathcal{C}$ è una circonferenza, i fuochi coincidono tra loro e con il centro degli assi. Se $e \neq 0$ le due rette di equazioni $x = \pm\frac{a}{e}$ sono dette ***direttrici*** dell'ellisse:

- $x = \frac{a}{e}$ si dice **relativa al fuoco** $(c, 0)$
- $x = -\frac{a}{e}$ si dice **relativa al fuoco** $(-c, 0)$

### *Osservazione 1*

Poichè risulta $d(B, F') = d(B, F) = a = d(O, A)$, questo dà un semplice metodo grafico per disegnare i fuochi con l'uso di riga e compasso. Basterà puntare in $B$ il compasso di raggio $a$, l'intersezione con l'asse $x$ darà allora i fuochi cercati.

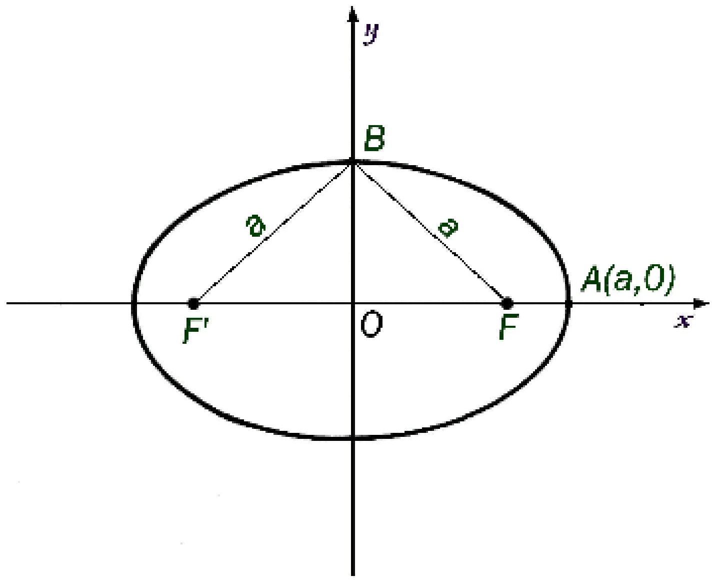
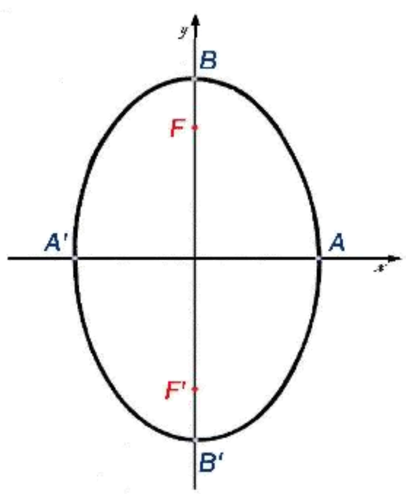



**Figura:** Conoscendo l'equazione dell'ellisse è possibile tracciare sugli assi la posizione dei fuochi.

### *Osservazione 2*

Le considerazioni precedenti vengono fatte nel caso in cui $a > b$ ;
Se $a < b$ allora la figura è del tipo seguente cioè il ***semiasse maggiore è lungo l'asse delle Y***. Inoltre, sempre se $a < b$ i fuochi saranno rispettivamente $F = (0, c), F'(0, -c)$ con $c = \sqrt{b^2 - a^2}$



# ESERCIZI SULL'ELLISSE

Mediante l'equazione normale dell'ellisse, si possono risolvere problemi come ad esempio, la determinazione dell' ellisse passante per due punti, dell'intersezione dell'ellisse con una data retta, delle tangenti all'ellisse passanti per un dato punto ecc.

## Vediamo qualche esempio:

1. **DETERMINARE A E B IN MODO CHE L'ELLISSE DI EQUAZIONE:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **PASSI PER I PUNTI** $P(3;1), Q(-2;2)$. **DETERMINARE POI I SEMIASSI, LA SEMIDISTANZA FOCALE E L'ECCENTRICITÀ DELL'ELLISSE.**

**DOVENDO L'ELLISSE PASSARE PER I PUNTI** $P(-3;1)$ **E** $Q(-2;2)$**, DEVE RISULTARE:**

$$\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$$

$$\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$$

**PONGO** $\frac{1}{a^2}=u$**,** $\frac{1}{b^2}=v$**, IL SISTEMA DIVENTA:**

$$9u+v=1$$

$$4u+4v=1$$

**CHE RISOLTO DA:** $u=3/32$ **E** $5/32$ **E QUINDI** $a^2=32/3$ **E** $b^2=32/5$**. L'EQUAZIONE RICHIESTA È QUINDI:**

$$\frac{3x^2}{32}+\frac{5y^2}{32}=1$$

**I SEMIASSI SONO** $a=\sqrt{}(32)(3)-(32)(5)=\ (8)/(\sqrt{}15)$**, E L'ECCENTRICITÀ È:**

$$e=\frac{c}{a}=\ 8\sqrt{15}\ *\ \sqrt{}(3)(32)\ =\ \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

2. **DETERMINARE LE INTERSEZIONI DELL'ELLISSE DI EQUAZIONE:** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$**, CON LA RETTA DI EQUAZIONE:** $6x\ -y-2=0$.

**LE COORDINATE DEGLI EVENTUALI PUNTI DI INTERSEZIONE SONO DATE DALLE SOLUZIONI DEL SISTEMA:**

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$6x - y - 2 = 0$$

**CHE, RISOLTO DÀ:**

$$x1 = 0\,, y1 = -2\; e\; x2 = \frac{27}{41}, y2 = \frac{80}{41}.$$

**PERTANTO LA RETTA HA IN COMUNE CON L'ELLISSE I PUNTI**

$$(\mathbf{0}, -\mathbf{2})\ ,\ \left(\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{41}}, \frac{\mathbf{80}}{\mathbf{41}}\right).$$

3. **DETERMINARE L'EQUAZIONE CANONICA DELL'ELLISSE PASSANTE PER IL PUNTO** $P\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right)$**, E AVENTE UN FUOCO NEL PUNTO** $F'\left(-\sqrt{5}, 0\right)$.

**PERCHÈ L'ELLISSE PASSI PER IL PUNTO** $P\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ **DEVE RISULTARE:**

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} * \frac{3\sqrt{3}}{2}}{a^2} + b^2 = 1.$$

**PERCHÈ UN FUOCO CADA NEL PUNTO** $F'\left(-\sqrt{5}, 0\right)$ **DEVE ESSERE:**

$$a^2 - b^2 = \left(-\sqrt{5}\right)\left(-\sqrt{5}\right).$$

**RISOLVENDO IL SISTEMA:**

$\left(\frac{27}{4a^2}\right) + \left(\frac{1}{b^2}\right) = 1$

$$a^2 - b^2 = 5$$

**SI TROVA:** $a^2 = 9,\ b^2 = 4$**, E QUINDI L'EQUAZIONE DELL'ELLISSI È :**

$$(x^2)(18) + (y^2)(2) = 1.$$