“Liceo Scientifico L. da Vinci”

A.S. 2004/2005

Progetto di Fisica

Studio del moto dei proiettili

Studente

Luigi Pedone

5H – A.s. 2004/2005

La gittata

Nell'opera *Due nuove scienze* di Galileo, si asserisce che ``le elevazioni che differiscono dai 45 gradi della stessa quantitá in piú o in meno, conducono alla stessa gittata''. Il moto di un proiettile si puó pensare come la composizione di due moti: uno *rettilineo uniforme* in direzione orizzontale, e uno *uniformemente accellerato* (con accellerazione modulo g) in direzione verticale. Ne segue che la traiettoria seguita dal corpo (se é denso e poco esteso, altrimenti dal suo centro di massa), é una parabola. La *gittata* é la distanza tra il punto in cui viene lanciato un proietile (con velocitá iniziale inclinata cerso l'alto rispetto all'orizzontale) e il punto in cui esso ritorna al suolo. É interessante osservare che all'aumentare dell'angolo, formato con il terreno, dapprima la gittata del proiettile aumenta, ha un massimo quando l'angolo é uguale a $pi/4$ e poi ritorna a diminuire, fino a quando il proiettile é lanciato verso l'alto. Per studiare la gittata di un proiettile che si muove in moto parabolico (cioé sotto l'azione della sola forza peso e trascurando l'attrito con l'aria) si utilizza un riferimento *Oxy* in cui l'origine O degli assi del sistema di riferimento cartesiano, coincide dal punto in cui il proiettile é stato lanciato. La traiettoria sará definita dall'equazione:

$$y = \frac{v_y}{v_x}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_x^2}x^2$$

La gittata corrispondente a questa traiettoria é uguale all'ascissa del punto A (diverso da O) in cui la parabola interseca l'asse delle x. Per quale valore di x l'ordinata torna ad annullarsi? Per $y = 0$. Da cui

$$y = \frac{v_y}{v_x}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_x^2}x^2 = 0$$

Da questa equazione si ricava

$$gx^2 - 2v_xv_yx = 0$$

che ha come soluzioni

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{2v_x v_y}{g}(1)$$

Per determinare le condizioni per le quali si ha la gittata massima, é conveniente usare qualche richiamo di trigonometria. Mettiamo ora a sistema le due velocitá $v_x = v_0 cos\alpha$ e $v_y = v_0 sin\alpha$. Quindi riscrivendo la (1) abbiamo che:

$$\Delta x = \frac{2(v_0 cos\alpha)(v_0 sin\alpha)}{g} = \frac{2v_0 cos\alpha sin\alpha}{g}$$

e sfruttando le proprietá delle funzioni seno e coseno

$sin(2\alpha) = 2sin\alpha cos\alpha$ abbiamo finalmente la

$$\Delta x = \frac{v_0^2 sin(2\alpha)}{g}(2)$$

Poiché la velocitá iniziale e g sono costanti, la gittata é massima quando $sin(2\alpha)$ assume il suo valore massimo, cioé quando l'angolo 2αé uguale a pi, quindi $\alpha = \pi/4$. Per tale valore allora la (2) assume la forma:

$$\Delta x = \frac{v^2}{g}$$

Quindi abbiamo dimostrato che la gittata é massima quando l'angolo con cui viene sparato il proiettile é pari a $pi/4$. Dimostriamo ora l'altra affermazione di Galileo. Che anche se l'angolo diventa superiore ($> \pi/4$), la gittata non aumenta, anzi conducono alla stessa. Consideriamo due elevazioni che differiscono da $pi/4$ di una stessa quantitá phi, in piú o in meno. Consideriamo ora la prima elevazione. Sia l'angolo $\alpha_1 = \pi/4 + \phi$. Ne segue che:

$$G_1 = \frac{v_0^2 sin(2(\pi/4 + \phi))}{g} = \frac{v_0^2 sin(90 + 2\phi)}{g}$$

Per le proprietá delle funzioni trigonometriche complementari,

essendo $sin(90 + \phi) = cos(\phi)$, abbiamo:

$$G_1 = \frac{v_0 cos(2\alpha_1)}{g}$$

Analogamente si procede per l'angolo $\alpha_2 = \pi/4 - \phi$. Si ha

$$G_2 = \frac{v_0^2 sin(2(\pi/4 - \phi))}{g} = \frac{v_0^2 sin(-(2\phi - \pi)}{g}$$

e per la stessa proprietá,

$$G_1 = \frac{v_0 cos(2\alpha_1)}{g}$$

Tempi di caduta

Abbiamo quindi dimostrato ora l'intuizione galileiana matematicamente. Abbiamo affermato *l'identitá fra le due gittate*, purché le due velocitá iniziali siano uguali e g costante per entrambi i moti. Concludendo con una ultima osservazione sul moto parabolico, riguardante i tempi di caduta. Essi saranno infatti diversi. Tanto piú é maggiore g tanto piú aumenterá la differenza fra di loro. Infatti

$$t_{fin} = 2\frac{v_0 sin\alpha}{g}$$

Quindi poiché a 0 il seno é nullo, e a pi é massimo, il tempo della caduta di un proiettile lanciato con angolo di alzo maggiore, sará superiore.

La resistenza dell'aria

Con lo studio del moto di un proiettile si intende fornire un modello generale per studiare i fenomeni dei corpi che vengono lanciati (o urtano ad esempio) con un angolo di alzo obliquo, con una velocitá costante e che compiono un moto parabolico. Chiaramente la resistenza dell'aria non é assolutamente trascurabile. Infatti, piú il corpo é grande, piú la resistenza dell'aria (o di un fluido) influisce sulle variabili del moto (gittata, altezza massima, tempo di caduta). Esempi di moti di proiettili possono essere la cartuccia lanciata da un fucile di un cacciatore, di un cannone da guerra, di un lancio ``a colombella" di un giocatore di basket, ad una pallina da golf, da una battuta di un giocatore di baseball eccetera. Una caratteristica importante della resistenza aerodinamica dei fluidi é che essa dipende dalla velocitá: piú veloci sono gli oggetti piú grande é la resistenza dei fluidi nei quali si muovono. Quindi la seconda legge di Newton assume questa forma:

$$\sum F_y = mg - bv = ma$$

oppure

$$a = g - \frac{b}{m}v.$$

Da questa relazione si verifica che, crescendo v, si raggiunge un punto in cui il membro di destra si annulla per $bv/m = g$.

In questo punto $a = 0$e rimane nulla per tutto il resto del moto; quindi la velocitá, da questo punto in poi, resta costante. Questa velocitá é detta di *regime* ed é data da

$$v_T = mg/b$$

Nel moto bidimensionale di un proiettile, ad esempio una palla da baseball che lascia la mazza a 45 m/s, notiamo che la velocitá é giá molto maggiore della velocitá di regime raggiunta dopo una caduta libera nell'aria, che é pari a 42 m/s. Si puó notare che che la costante bé uguale al peso della palla (circa 1.4 N che corrisponde a una massa di 0.14 kg) diviso la velocitá di regime di 42 m/s. Quindi $b = 9.033N$. Se la palla viaggia a 45 m/s é sottoposta a una forza d'attrito viscoso di 1.5 N che é maggiore del suo peso e quindi ha un effetto sostanziale sul moto. La resistenza dell'aria dipende dalla velocitá del proiettile rispetto ad essa. Se soffia il vento, i calcoli devono essere cambiati e il risultato sará diverso.

Indice