Vettori e operazioni vettoriali

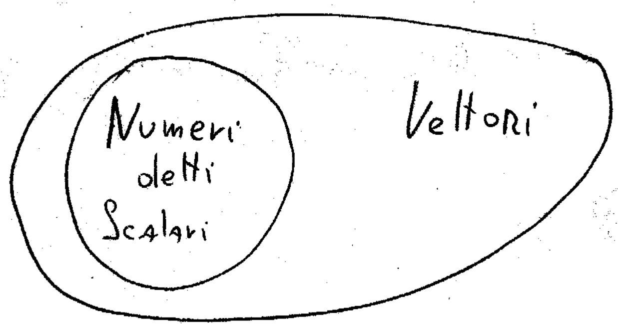
Prof. Francesco Zumbo

www.francescozumbo.it

I Vettori

Nell'antichità si utilizzavano soltanto i numeri (SCALARI) per cercare di spiegare i fenomeni fisici, ma molti fenomeni e molte grandezze non si potevano descritte.

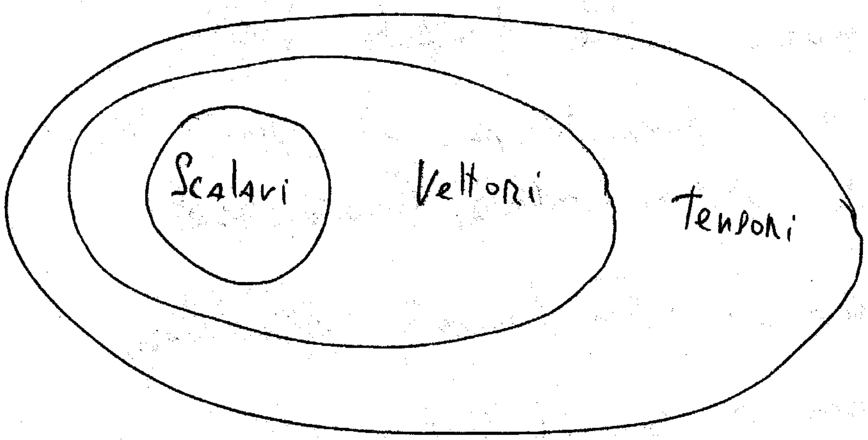
Per tale motivo furono introdotti i Vettori



Numeri $\subset$ Vettori

Sono Vettori: lo spazio, la velocità, l'accelerazione, la forza, il peso

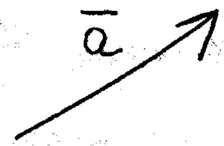
Successivamente si osservarono fenomeni tipo: gli sforzi, le torsioni, il campo elettromagnetico che non potevano essere studiati né con gli scalari, né con i vettori. Per tale motivo sono stati introdotti i Tensori.



Scalari $\subset$ Vettori $\subset$ Tensori

L'analisi matematica che governa i tensori è molto sofisticata ed è argomento di studio approfondito nei corsi di laurea: Matematica e Fisica.

I Vettori



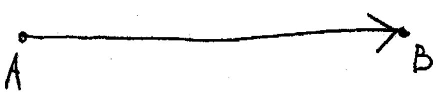
Definizione (di Vettore):

Definiamo Vettore un ente geometrico astratto caratterizzato da:

- Modulo
- Verso
- Direzione

Il modulo è la componente scalare (numerica) del Vettore, rappresenta l'intensità del vettore ed è rappresentato con la lunghezza del vettore.

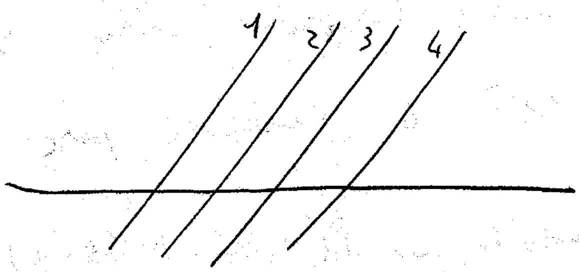
Il verso è il senso di percorrenza sul vettore



quando per fissare le idee se chiamiamo + la percorrenza da A verso B, dobbiamo chiamare − la percorrenza da B verso A.

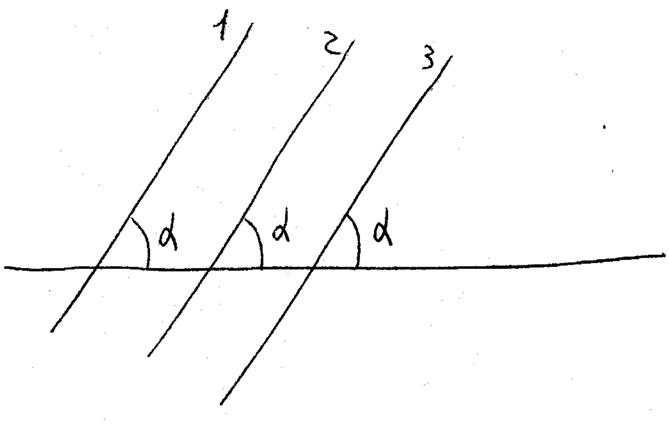
La direzione è l'ente astratto comune ad una retta e a tutte le sue parallele.
Due o più rette parallele hanno la stessa direzione in comune.

~~Due~~



Le parallele 1, 2, 3, 4 hanno la stessa direzione.

La direzione è un qualcosa di fortemente collegato con l'angolo formato tra le parallele e una generica trasversale



Precisamente la direzione dal punto di vista numerico è il valore della funzione goniometrica

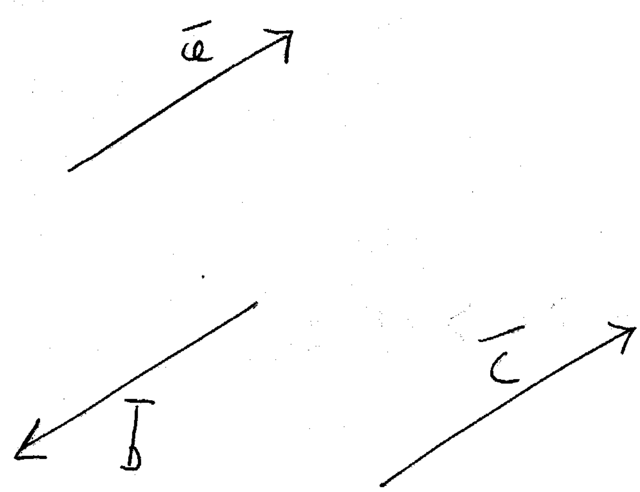
$$tg\,\alpha = dir(1) = dir(2) = dir(3)$$

Notazione

Solitamente i vettori si indicano con le lettere minuscole e con le seguenti tratti o frecce

$$\bar{a}\,,\ \vec{b}\,,\ \underline{c}$$

Vettore equipollente

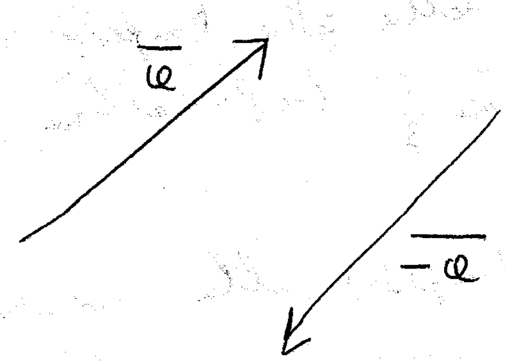


Due vettori sono equipollenti se hanno:

1) lo stesso modulo cioè la stessa lunghezza
2) lo stesso verso
3) la stessa direzione (cioè devono essere paralleli)

$\bar{a}$ e $\bar{c}$ sono equipollenti. $\bar{a}$ e $\bar{b}$ non sono equipollenti.

Vettore opposto



un vettore è opposto ad un altro se:

1) ha lo stesso modulo
2) ha la stessa direzione
3) <u>ha verso contrario</u>

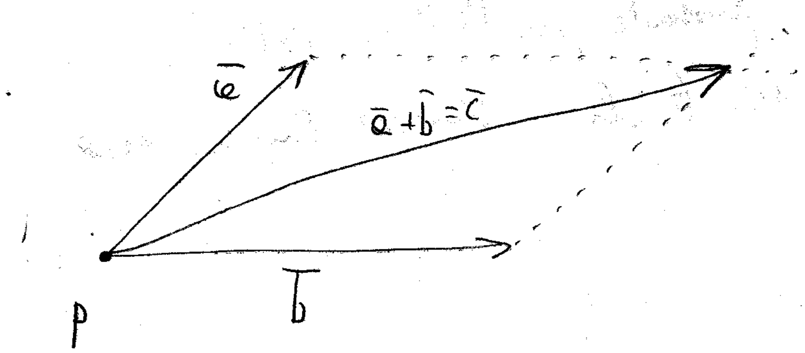
OPERAZIONI VETTORIALI

ettore

<u>Somma vettoriale con la regola del parallelogramma.</u>

Siano $\overline{a}$ e $\overline{b}$ 2 vettori qualsiasi

Si considera un punto P detto polo e si riportano i 2 vettori partenti da P.



Si costruisce il parallelogramma. La diagonale passante per il polo P rappresenta il vettore somma $\bar a + \bar b = \bar c$ detto <u>Risultante</u>.

Si osserva che il vettore somma $\bar a + \bar b = \bar c$ è con una lunghezza minore rispetto alla somma algebrica del modulo di $|a|$ più la lunghezza del modulo di $|b|$, questo ci fa capire che la somma vettoriale non risponde alle stesse regole della somma tra numeri. Il valore del vettore somma $\bar c = \bar a + \bar b$ (il Risultante) dipende dall'angolo formato tra i 2 vettori.

Se i vettori $\bar{a}$ e $\bar{b}$ fossero 2 forze che spingono un corpo si osserverebbe che il corpo non si muove nella direzione di $\bar{a}$, non si muove nella direzione di $\bar{b}$, ma si muoverà nella direzione e con l'intensità di $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.

Se dobbiamo calcolare la somma vettoriale tra i vettori

$$\bar{e} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$$

con la regola del parallelogramma dobbiamo prima calcolare $\bar{a} + \bar{b} = \bar{f}$, poi sommare $\bar{f} + \bar{c} = \bar{g}$, poi sommare $\bar{g} + \bar{d} = \bar{h}$, cioè dobbiamo applicare 3 volte la regola del parallelogramma. Questo risulta scomodo, lungo e con ampia possibilità di commettere qualche errore accidentale.

Per superare tale limitazione gli scienziati hanno scoperto "la regola del poligono".

Vettore differenza o Differenza Vettoriale

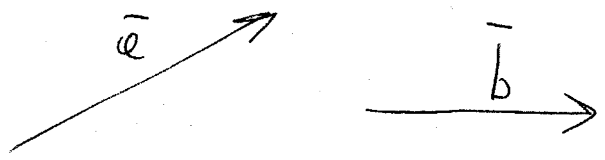
Se dobbiamo calcolare la differenza vettoriale

$$\bar{a} - \bar{b} \qquad (1)$$

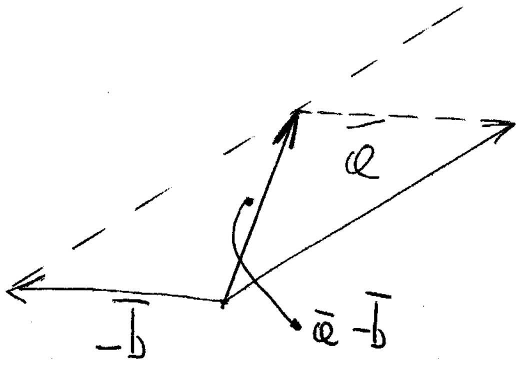
procediamo nel seguente modo:

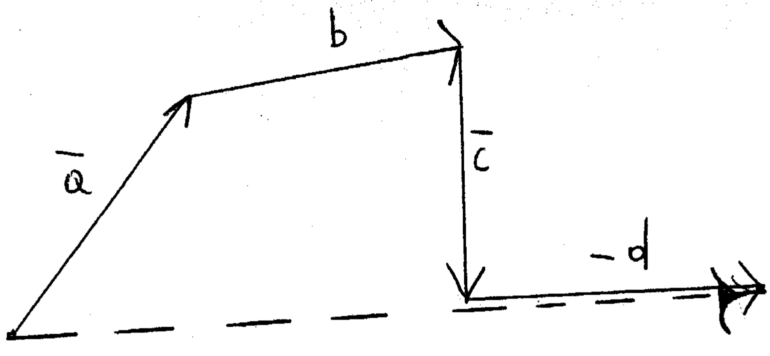
$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$$

cioè abbiamo trasformato la differenza vettoriale nella somma tra il vettore $\bar{a}$ e il vettore opposto $(-\bar{b})$



$\bar{a} - \bar{b} =$



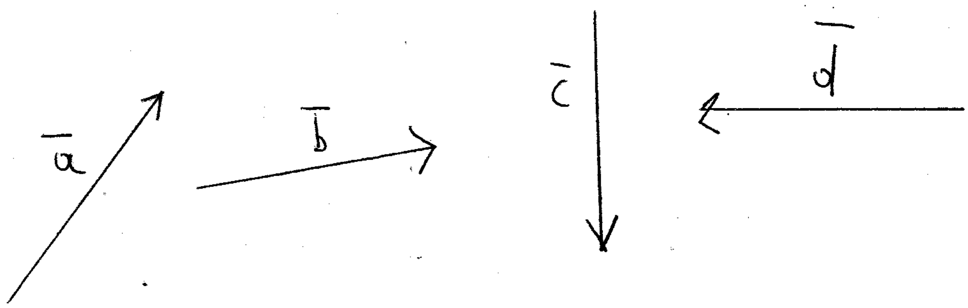


Il lato di chiusura della spezzata $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ è il vettore somma.

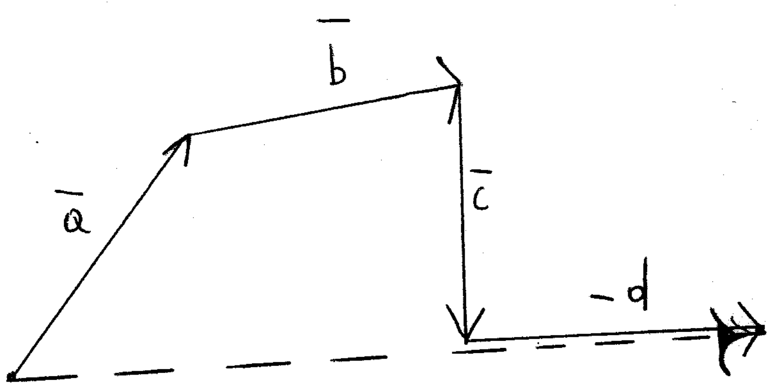
Risulta evidente che tale sistema è molto più rapido e ampio rispetto alla regola del parallelogramma.

Somma e differenza vettoriale con la Regola del Poligono.

Supponiamo di avere

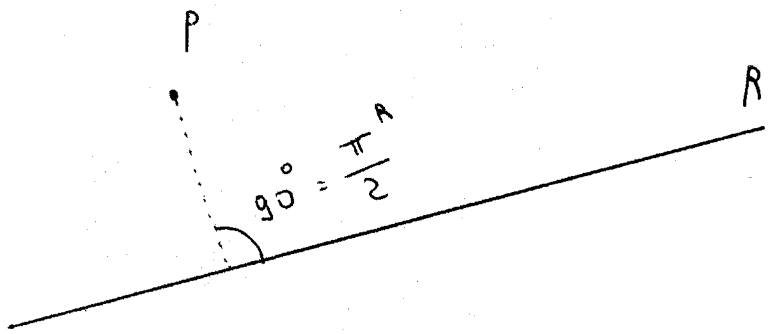


Vogliamo calcolare $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}-\bar{d}$



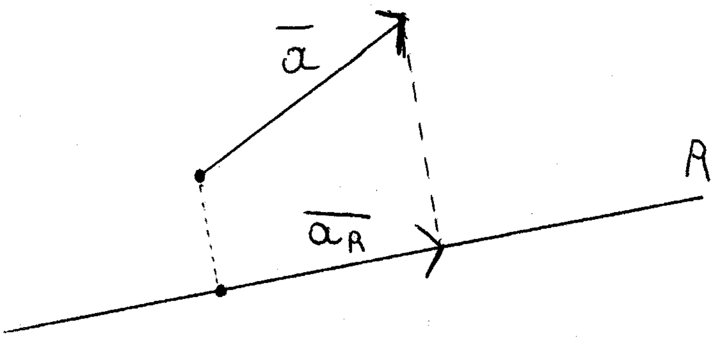
Il lato di chiusura della spezzata $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ è il vettore somma.
Risulta evidente che tale sistema è molto più rapido e ampio rispetto alla regola del parallelogramma.

Proiezione di un punto su una retta



Proiettare un punto su una retta significa considerare tra le infinite rette perpendicolari ($\perp$) alla retta R quella passante per il punto P. Chiamiamo S tale retta. Il punto di intersezione tra R e S ($R \cap S$) è la proiezione di P su R.

Proiezione di un vettore su una retta.



Proiettare un vettore su una retta significa proiettare la punta della freccia e la coda del vettore (con la regola precedente) sulla retta R.

$\overline{a_R}$ è "il componente" del vettore $\bar{a}$ sulla retta R.

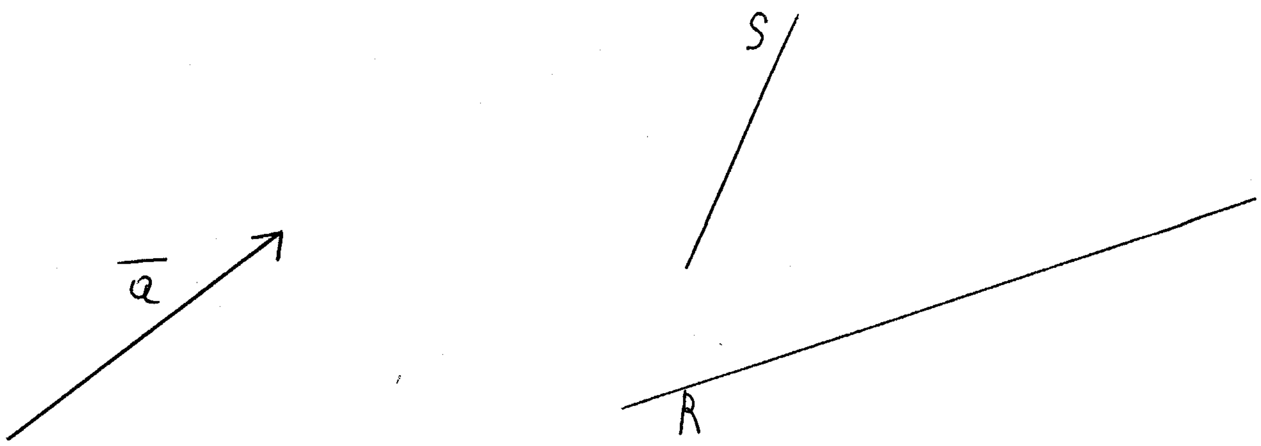
Se $\bar{a}$ è parallelo $(//)$ ad R $\Rightarrow |a| = |a_R|$

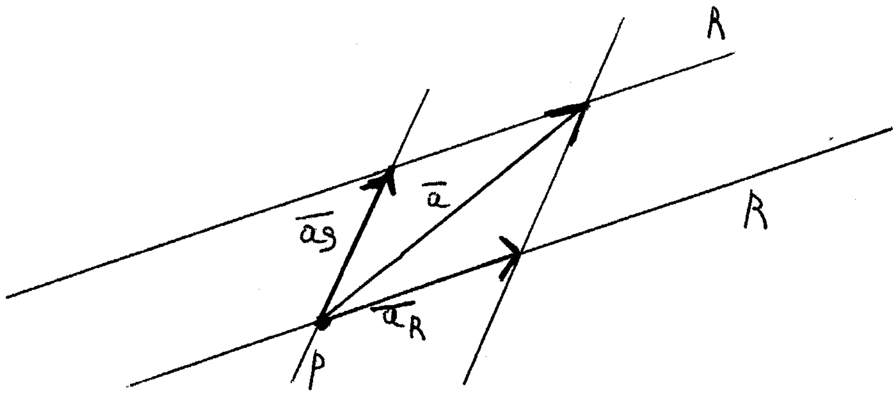
Se $\bar{a}$ è perpendicolare $(\perp)$ ad R $\Rightarrow |a_R| = 0$

Se $\overline{a_R}$ forma un angolo con la retta R $\Rightarrow$

$0 < |a_R| < |a_R$ se $\bar{a}$ fosse parallelo ad $R|$

Scomposizione di un vettore secondo 2 rette





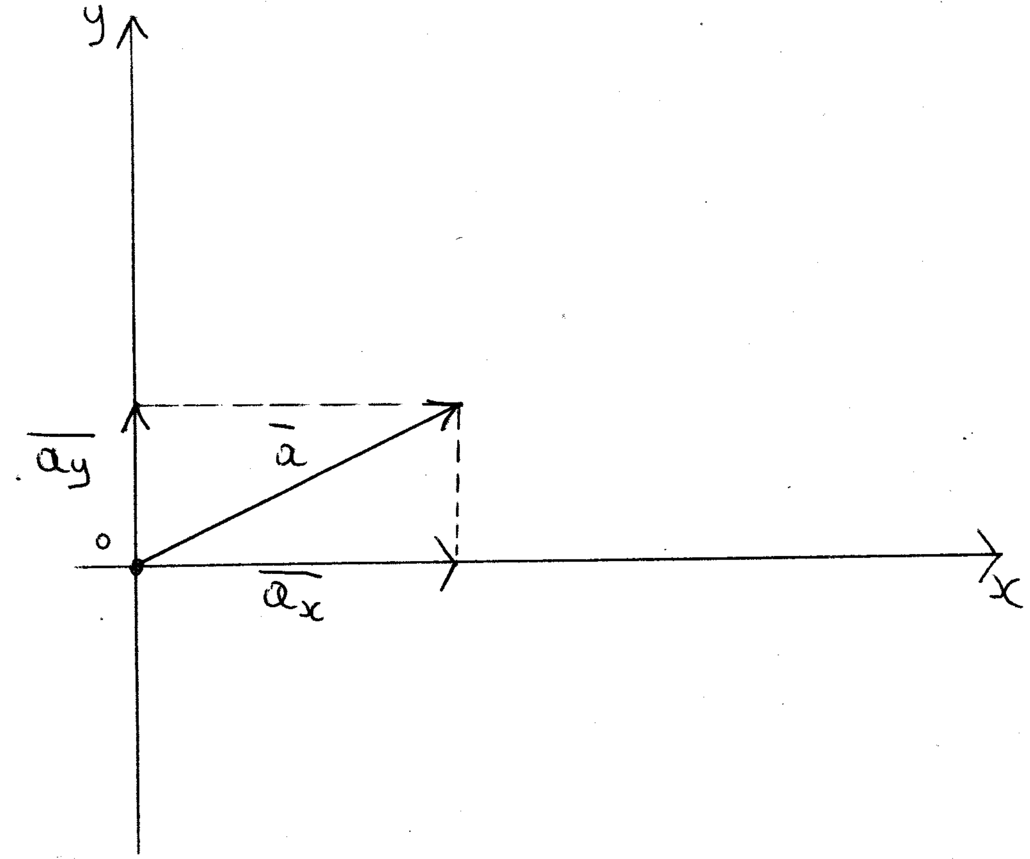
Dato il vettore $\bar{a}$ e 2 rette R e S, si sceglie un polo P da cui si applicano il vettore $\bar{a}$, la retta R e la retta S.

Per la punta del vettore $\bar{a}$ si mandano le parallele alle rette R e S. Si viene così a formare un parallelogramma avente per diagonale il vettore $\bar{a}$.

Quindi per la regola della somma vettoriale con la regola del parallelogramma possiamo affermare che i lati del parallelogramma sono "i componenti di $\bar{a}$ rispetto alle rette R e S". E si ha

$$\overline{a_R} + \overline{a_S} = \overline{a}$$

Scomposizione cartesiana di un vettore

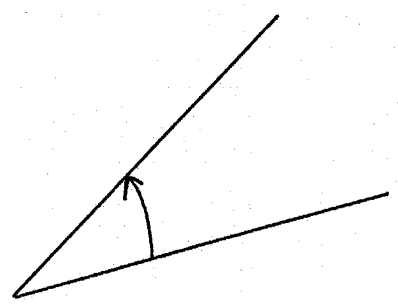


$$\overline{a_x} + \overline{a_y} = \overline{a} \qquad (1)$$

La (1) in fisica è importantissima in quanto il ricorso alle componenti cartesiane di un vettore o di un fenomeno fisico è molto frequente e fondamentale.

Angoli e scale angolari

Definizione di angolo:



Definiamo angolo una porzione di piano delimitata da 2 semirette.

Misura di angoli

Per misurare un angolo esistono diverse scale angolari, noi illustreremo le seguenti scale angolari

- sessagesimale
- decimale
- centesimale o gon
- radianti

Scala sessagesimale

Un angolo in questa scala è del tipo

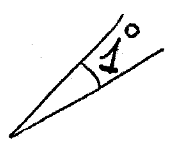
$$15^\circ \quad 12' \quad 34''$$

15 gradi, 12 primi, 34 secondi.

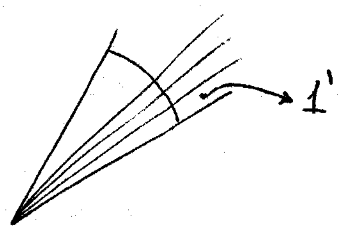
La misura dell'angolo giro è di 360°

(360 gradi sessagesimale)

1° (1 grado sessagesimale) è la 360 esima parte dell'angolo giro.



$1'$ (un primo) è la 60 esima parte di 1°



$$1' = \frac{1^\circ}{60}$$

$1''$ (un secondo) è la 60 esima parte di $1'$.

$$1'' = \frac{1'}{60} \quad \text{cioè}$$

$$1'' = \frac{1^\circ}{3600}$$

Scala decimale

Un angolo è del tipo

$$28,1219347 5^{d}$$

d sta per indicare che l'angolo lo stiamo indicando con la scala decimale.

La misura dell'angolo giro è di 360^{d}

Scala centesimale (o scala gon)

Molto utilizzata dagli Ingegneri, Architetti e Geometri.

Divide l'angolo giro in 400 parti

Un generico rappresentante è $32,385712^{g}$

Risulta evidente che in tale scala, un angolo retto vale 100^{g} e un angolo piatto vale 200^{g}

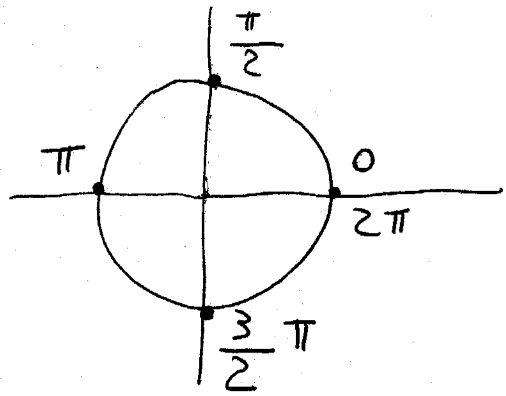
Scala Radianti

Molto utilizzata dai Matematici e dai Fisici.

Un generico rappresentante è $\alpha = \frac{\pi}{6}$ scritto anche $\alpha = \frac{\pi}{6}^R$

Tale scala divide l'angolo in 2π radianti

L'angolo retto vale $\frac{\pi}{2}$, l'angolo piatto π



Trasformazione di un angolo sessagesimale in decimale.

Trasformiamo l'angolo $15° 12' 34''$

$$\alpha^d = 15 + \frac{12}{60} + \frac{34}{3600}$$

cioè abbiamo convertito in frazioni di grado sia i primi sia i secondi.

$$\alpha^d = 15 + 0{,}2 + 0{,}0094444 = 15{,}209444^d$$

Trasformazioni tra scale angolari

Vale la seguente proporzione

$$\frac{\alpha^d}{360} = \frac{\alpha^g}{400} = \frac{\alpha^R}{2\pi} \qquad (1)$$

Per convenzione si utilizza lasciare il π esplicito quando l'angolo è nella scala radianti.

Mentre quando si deve trasformare, il numero irrazionale π vale:

$$\pi = 3,14159265$$

La (1) può anche essere scritta nella forma

$$\alpha^d : 360 = \alpha^g : 400 = \alpha^R : 2\pi$$

Esempio

Trasformare in tutte le altre scale l'angolo

$$\alpha^{\circ} = 15^{\circ}\ 12'\ 34''$$

Per prima cosa si deve trasformare in decimali.
Calcolo che abbiamo già svolto

$$\alpha^{d} = 15{,}209444^{d}$$

Trasformiamolo nella scala centesimale (gon)

$$\frac{\alpha^{d}}{360} = \frac{\alpha^{g}}{400}$$

$$15{,}209444 : 360 = \alpha^{g} : 400 \ ;$$

$$\alpha^{g} = \frac{15{,}209444 \cdot 400}{360}$$

$$\alpha^{g} = 16{,}899382\overline{2}^{g}$$

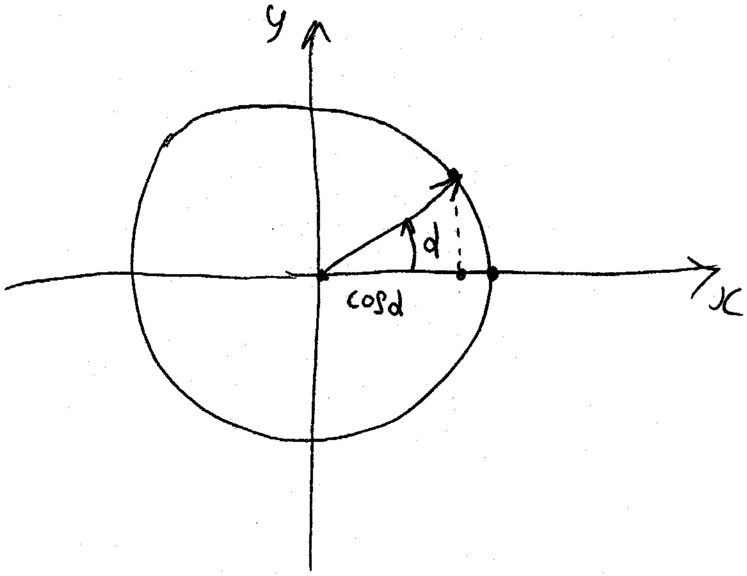
Trasformiamolo in Radianti

$$\frac{\alpha^{d}}{360} = \frac{\alpha^{R}}{2\pi}$$

$$15,209444 : 360 = \alpha^{R} : 2\pi$$

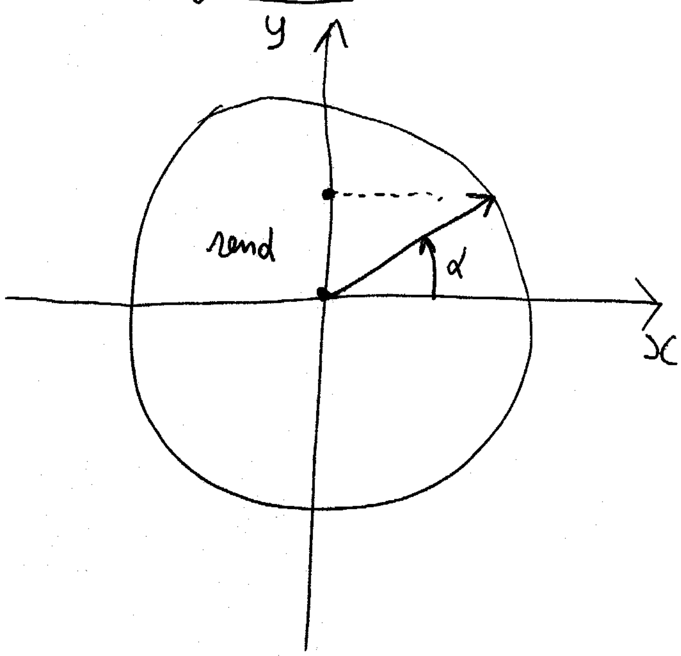
$$\alpha^{R} = \frac{15,209444 \cdot 2\pi}{360} = 0,084497\ \pi$$

Coseno di un angolo



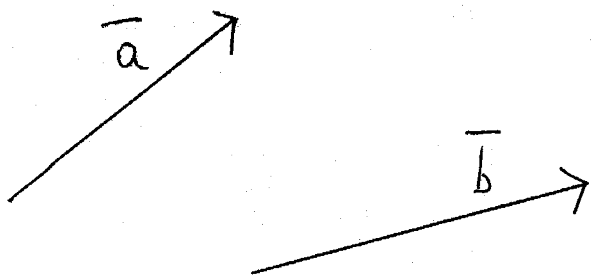
Definiamo coseno di un angolo la proiezione sull'asse delle ascisse x del raggio vettore che forma un angolo α rispetto all'asse x.

Seno di un angolo



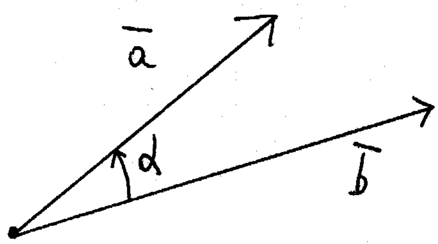
Definiamo seno di un angolo la proiezione sull'asse delle ordinate del raggio vettore che forma un angolo α rispetto all'asse delle ascisse x.

Prodotto scalare tra 2 vettori



Ricordiamo che si definisce angolo tra 2 vettori l'angolo di ampiezza minima che si forma tra 2 vettori.

Si applicano i vettori $\bar{a}$ e $\bar{b}$ in un polo P



$\bar{a}\cdot\bar{b}$ = prodotto scalare tra i vettori $\bar{a}$ e b =

$= |a|\cdot|b|\cdot\cos\alpha$. $\bar{a}\cdot\bar{b}=|a|\cdot|b|\cdot\cos\alpha$

Il prodotto scalare non è un vettore ma è un numero, cioè uno scalare.
Si osserva che $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$. Il prodotto scalare è commutativo.

Prodotto vettoriale

Prendiamo in considerazione i 2 vettori precedenti

Il prodotto vettoriale lo si indica con

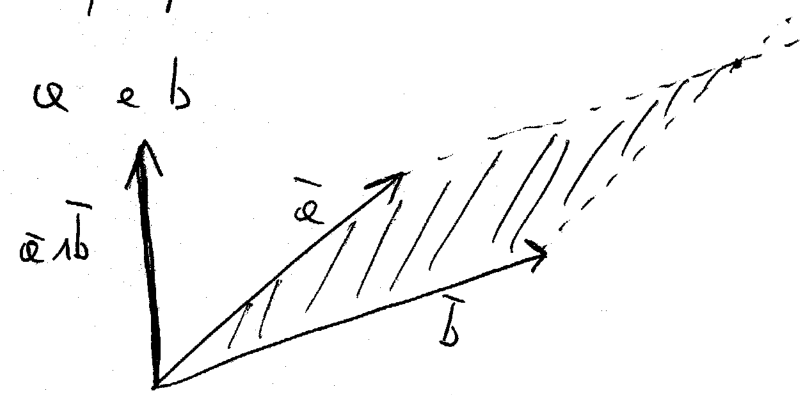
$\bar{a} \wedge \bar{b}$ che si legge: a vettore b oppure

a prodotto vettoriale b.

E' un vettore.

Modulo: $|a| \cdot |b| \cdot \text{sen}\,\alpha$

Direzione: perpendicolare al piano che contiene i 2 vettori a e b



Verso: secondo la regola del pollice della mano destra.

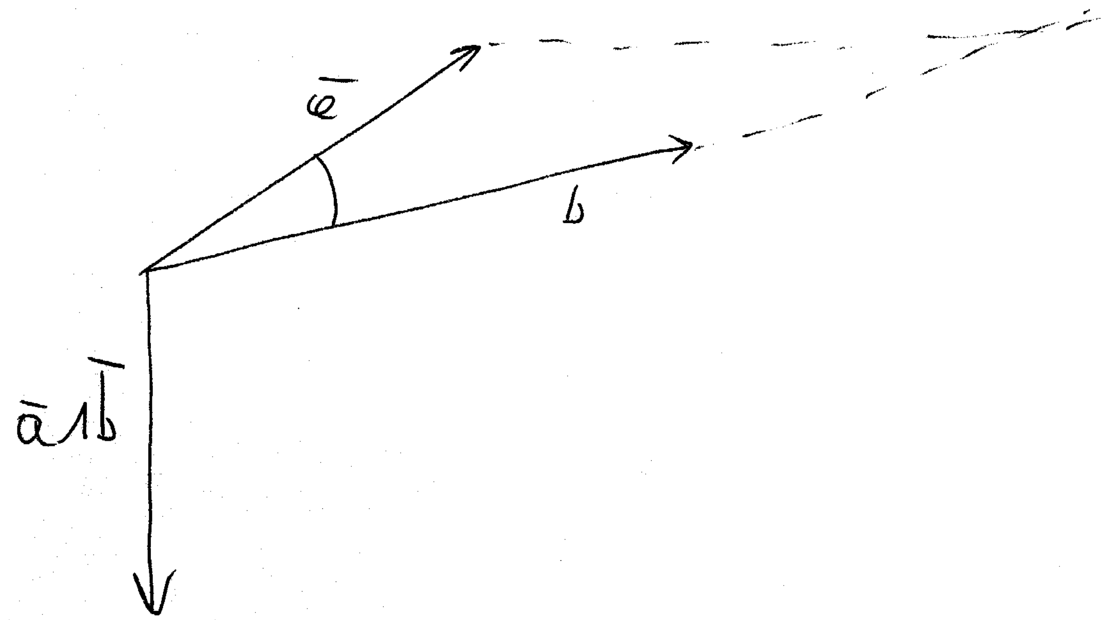
Regola del pollice della mano destra

Analizziamo come sempre l'esempio precedente.

Dobbiamo calcolare il prodotto vettoriale

$$\bar{a} \wedge \bar{b}$$

Si deve idealmente posizionare il vettore $\bar{a}$ sull'indice della mano destra ed effettuare una rotazione "dell'angolo minimo tra i 2 vettori". Nel nostro caso, a tal fine, dobbiamo ruotare la mano fino ad avere il pollice rivolto verso il basso.

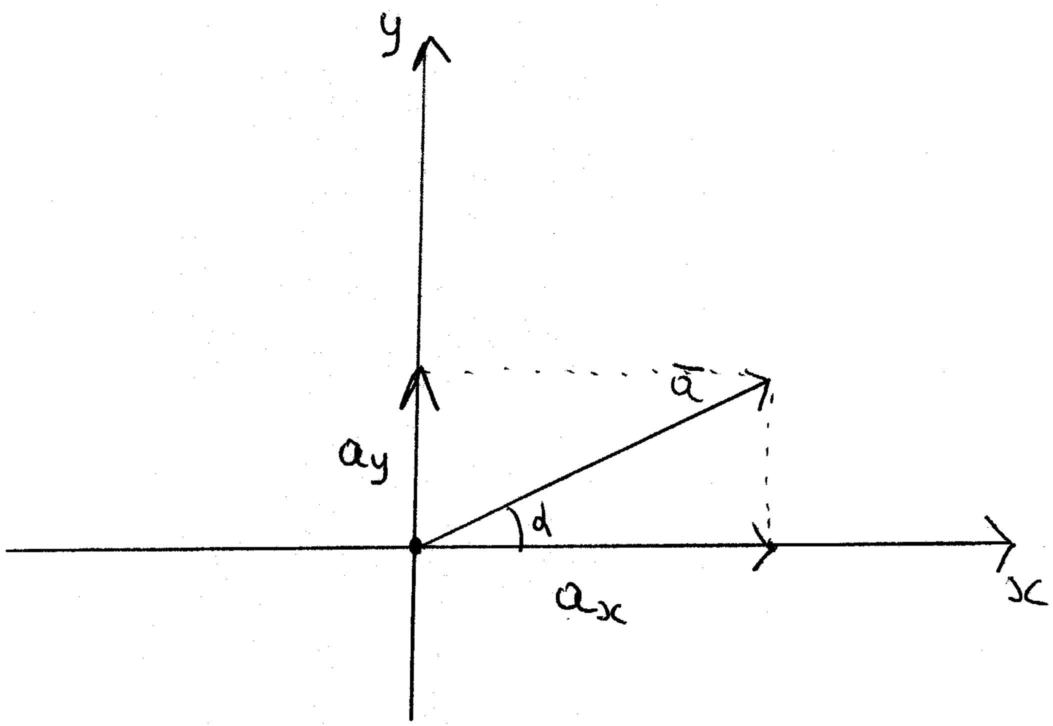


È evidente che: $\bar{a} \wedge \bar{b} = -\bar{b} \wedge \bar{a}$

Il prodotto vettoriale è anti-commutativo.

Scomposizione cartesiana

Dopo avere introdotto le funzioni goniometriche $sen\,\alpha$ e $\cos\alpha$ possiamo osservare che



$$a_x = a \cdot \cos\alpha$$

$$a_y = a \cdot sen\,\alpha$$