Liceo Scientifico Statale

Leonardo da Vinci

Via Possidonea, 14 - 89100 Reggio Calabria - Tel: 0965-29911 / 312063

www.liceovinci.rc.it

Anno Scolastico 2006-2007

Il moto del proiettile

Prof. Francesco Zumbo

www.francescozumbo.it oppure http://it.geocities.com/zumbof/

e-mail personale : progettofisica@yahoo.it

Dedico questo lavoro Scientifico Didattico

a mio Padre Natale,

al Suo innato intuito per la Fisica

e al suo costante impegno per avvicinare i giovani

all'amore per la scuola e al miglioramento professionale e personale,

al fine di dare un contributo alla societá e a se stessi.

Spesso mi viene in mente una sua frase : ***"Non é importante che lavoro si svolge nella vita,***

ma é importante come lo si fa, perché ogni lavoro é il ritratto di chi lo esegue."

Con Affetto , Francesco

Reggio Calabria, 19 Settembre 2007

Questi appunti vogliono essere un ulteriore strumento didattico per gli studenti. Idea che mi é venuta dopo essere stato a contatto con bambini e studenti affetti da Sclerosi Multipla, costretti a lunghe degenze presso il Reparto di Neurologia dell'Ospedale di Fidenza (Parma), Divisione Diretta da una Eccezionale persona, il ***Prof. Enrico Montanari*** *a cui mia riconoscenza e stima andranno Sempre.*

A coloro che vorranno dare un piccolo contributo all'Associazione Nazionale per la Lotta Contro la Sclerosi Multipla (sezione di Parma) un Grande Grazie!!!

Conto Corrente Postale : 13 50 34 38 - Intestato a: AISM di Parma (Associazione Italiana Sclerosi Multipla) di Parma - Indirizzo: Piazzale S. Sepolcro, 3 - 43100 Parma (PR) - Telefono : 0521-231251.

Con la seguente Causale: **+ Matematica ,- Sclerosi Multipla**

1. Generalitá

Il moto del proiettile é uno dei movimenti fondamentali della cinematica del punto. Indicheremo con $+$ il verso ascendente dei vettori e con $-$ il verso discendente dei vettori.

Supponiamo di posizionare un cannone con la bocca da fuoco disposta sull'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali $S \equiv (O, x, y)$.

La traiettoria che percorre un proiettile , come dimostreremo in seguito, é parabolica e tale parabola é generata dalla composizione durante il movimento della *velocitá* $\overrightarrow{v}$ e dell'*accelerazione di gravitá* $\overrightarrow{g}$.

Ipotiziamo di essere nel **vuoto** e in un ambiente dove l'accelerazione di gravitá vale $9,81\,\frac{m}{sec^2}$ $(\frac{metri}{secondi\ al\ quadrato})$ quindi prescindiamo dalle resistenze di attrito nell'aria.

I dati iniziali che si utilizzano sono: l'accelerazione di gravitá $\overrightarrow{g}$ e la velocitá iniziale del proiettile $\overrightarrow{v_i}$ quando questi esce dalla bocca da fuoco.

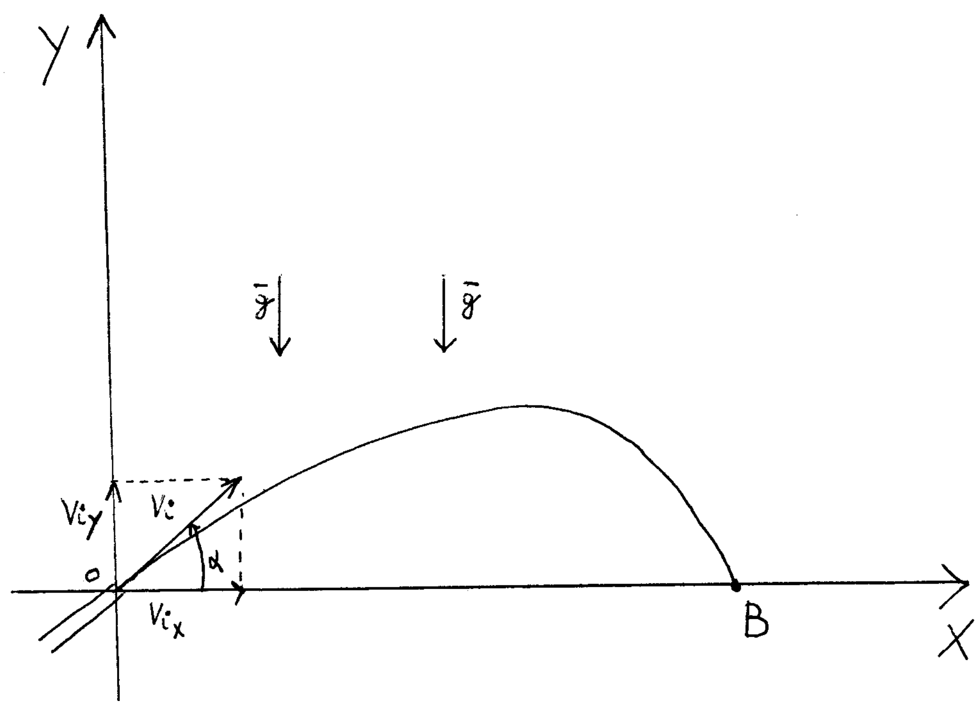

Figura 1

Indicheremo con

- v_{ix} la componente di $\overrightarrow{v_i}$ sull'asse x
- v_{iy} la componente di $\overrightarrow{v_i}$ sull'asse y
- g_x la componente di $\overrightarrow{g}$ sull'asse x. É uguale a 0 perché $\overrightarrow{g}$ é perpendicolare all'Asse x
- g_y la componente di $\overrightarrow{g}$ sull'asse y. É uguale a 9,81 $\frac{m}{sec^2}$

2. Il moto del proiettile

La direzione del vettore accelerazione di gravitá $\overrightarrow{g}$ é quella della congiungente tra il baricentro del proiettile sparato e il centro della terra.

Supponiamo di fissare un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine nella bocca da fuoco del cannone che spara il proiettile.

Indichiamo con segno $+$ i vettori orientati verso l'alto e con segno $-$ quelli orientati verso il basso.

Scomponiamo l'accelerazione di gravitá nelle componenti cartesiane

$$\left\{ \begin{array}{l} g_x = 0 \\ \\ g_y = -9,81 \frac{m}{sec^2} \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Questa scomposizione ci permette di capire alcune cose fondamentali , visto che l'accelerazione lungo l'asse x é nulla implica che lungo l'asse x il moto é *rettilineo uniforme*; mentre, visto che c'é accelerazione costante, lungo l'asse y si ha un *moto rettilineo uniformemente accelerato*.

Di conseguenza esisterá il seguente legame tra le velocitá

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = v_{i_x} \\ \\ v_y = v_{i_y} - g \cdot t \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Visto che sull'asse x si svolgerá un *moto rettilineo uniforme*, mentre sull'asse y un *moto rettilineo uniformemente accelerato*, per l'Asse x riportiamo la legge oraria del moto rettilineo uniforme e per l'Asse y la legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato

$$\left\{ \begin{array}{l} x = v_{i_x} \cdot t \\ \\ y = v_{i_y} \cdot t - \frac{1}{2}\, g \cdot t^2 \end{array} \right. \tag{2.3}$$

ricaviamo il tempo dalla prima equazione

$$t = \frac{x}{v_{i_x}} \tag{2.4}$$

lo sostituiamo nella seconda equazione

$$y = v_{i_y} \cdot (\frac{x}{v_{i_x}}) - \frac{1}{2} g \cdot (\frac{x}{v_{i_x}})^2 \tag{2.5}$$

svolgiamo le operazioni

$$y = \frac{v_{i_y}}{v_{i_x}} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_{i_x}^2} \tag{2.6}$$

riordiniamo secondo la forma

$$y = x^2, x, termine\ noto \tag{2.7}$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_{i_x}^2} + \frac{v_{i_y}}{v_{i_x}} \cdot x \tag{2.8}$$

$$y = (-\frac{g}{2v_{i_x}^2}) \cdot x^2 + (\frac{v_{i_y}}{v_{i_x}}) \cdot x \tag{2.9}$$

le quantitá

$$g, v_{ix}, v_{iy}$$

sono i dati iniziali e noti del problema , quindi sono delle costanti, pertanto l'equazione (2.9) puó essere scritta nella forma

$$y = ax^2 + bx \tag{2.10}$$

che é l'equazione di una parabola passante per l'origine.

Tale equazione dimostra che il moto di un proiettile é sempre parabolico e l'equazione della traiettoria parabolica é data dalla fondamentale equazione

$$y = (-\frac{g}{2v_{i_x}^2}) \cdot x^2 + (\frac{v_{i_y}}{v_{i_x}}) \cdot x \tag{2.11}$$

dove le quantiá x e y sono le coordinate del punto durante il movimento $P \equiv (x; y)$

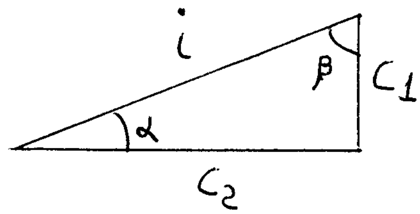

Figura 2

Consideriamo un triangolo rettangolo dove indichiamo con c_1 e c_2 i cateti e con i l'ipotenusa.

Dai teoremi di goniometria sui triangoli rettangoli sappiamo

Teorema 1: un cateto é uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto da calcolare:

$$c_1 = i \cdot \sin(\alpha) \tag{3.1}$$

$$c_2 = i \cdot \sin(\beta) \tag{3.2}$$

Teorema 2: un cateto é uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente al cateto da calcolare:

$$c_1 = i \cdot \cos(\beta) \tag{3.3}$$

$$c_2 = i \cdot \cos(\alpha) \tag{3.4}$$

Teorema 3: un cateto é uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto da calcolare

(3.5) $$c_1 = c_2 \cdot tg(\alpha)$$

(3.6) $$c_2 = c_1 \cdot tg(\beta)$$

Teorema 4: un cateto é uguale all'altro cateto per la cotangente dell'angolo adiacente al cateto da calcolare.

(3.7) $$c_1 = c_2 \cdot ctg(\beta)$$

(3.8) $$c_2 = c_1 \cdot ctg(\alpha)$$

Inoltre valgono le seguenti formule fondamentali

(3.9) $$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

relazione fondamentale della goniometria

(3.10) $$tg(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

(3.11) $$ctg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

4. Equazione del moto del proiettile con la goniometria

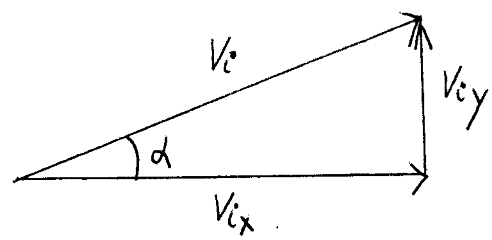

Figura 3

Dai teoremi di goniometria associati ai triangoli rettangoli, associando la quantitá v_{ix} al cateto orizzontale , la quantitá v_{iy} al cateto verticale e v_i all'ipotenusa , si ha

(4.1) $$v_{ix} = v_i \cdot \cos(\alpha) \;\; per\ il\ teorema\ 2$$

(4.2) $$v_{iy} = v_i \cdot \sin(\alpha) \;\; per\ il\ teorema\ 1$$

con α angolo formato dal vettore velocitá iniziale v_i e l'asse delle ascisse X.

Torniamo all'equazione del moto

(4.3) $$y = (-\frac{g}{2v_{i_x}^2}) \cdot x^2 + (\frac{v_{i_y}}{v_{i_x}}) \cdot x$$

inseriamo le precedenti in tale equazione

(4.4) $$y = (-\frac{g}{2 \cdot (v_i \cdot \cos(\alpha))^2}) \cdot x^2 + \frac{v_i \cdot \sin(\alpha)}{v_i \cdot \cos(\alpha)} \cdot x$$

(4.5) $$y = (-\frac{g}{2 \cdot v_i^2 \cdot \cos^2(\alpha)}) \cdot x^2 + tg(\alpha) \cdot x$$

scriviamo questa equazione isolando il termine

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

$$y = -\frac{g}{2 \cdot v_i^2} \cdot \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \cdot x^2 + tg(\alpha) \cdot x \tag{4.6}$$

la quantitá 1 del monomio

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

puó essere scritta inserendo la relazione fondamentale (3.9)

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Da cui

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \tag{4.7}$$

separando gli addendi del numeratore

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = tg^2(\alpha) + 1 \tag{4.8}$$

per cui

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = tg^2(\alpha) + 1 \tag{4.9}$$

inseriamo la (4.9) nella (4.6)

$$y = -\frac{g}{2 \cdot v_i^2} \cdot (tg^2(\alpha) + 1) \cdot x^2 + tg(\alpha) \cdot x \tag{4.10}$$

$$y = (-\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_i^2}) \cdot (tg^2(\alpha) + 1) + tg(\alpha) \cdot x$$

moltiplichiamo

$$y = -\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_i^2} \cdot tg^2(\alpha) - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_i^2} + tg(\alpha) \cdot x$$

portiamo tutto al primo membro

$$\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_i^2} \cdot tg^2(\alpha) + \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_i^2} + tg(\alpha) \cdot x + y = 0 \tag{4.11}$$

Questa é l'**equazione del moto del proiettile in forma goniometrica**.

Esprime l'equazione del moto del proiettile in funzione della **velocitá iniziale** v_i e dell'**angolo di inclinazione rispetto al piano orizzontale** α.

Ricordiamo che:

$\overrightarrow{g}$ é l'accelerazione di gravitá;

v_i é la velocitá iniziale;

x e y le coordinate del proiettile durante il movimento;

α l'angolo che forma il cannone rispetto al piano orizzontale, al momento dello sparo.

5. Gittata del proiettile

Si definisce gittata del proiettile la distanza misurata sull'asse orizzontale x tra l'origine degli assi dove é posizionato il cannone e il punto di arrivo del proiettile, B.

Il punto B essendo un punto appartenente all'asse x é caratterizzato dall'avere l'ordinata nulla ($y = 0$), pertanto basta porre $y = 0$, nell'equazione (4.3)

$$0 = (-\frac{g}{2v_{i_x}^2}) \cdot x^2 + (\frac{v_{i_y}}{v_{i_x}}) \cdot x \tag{5.1}$$

mettiamo la x in evidenza

$$x[(-\frac{g}{2v_{i_x}^2}) \cdot x + (\frac{v_{i_y}}{v_{i_x}})] = 0 \tag{5.2}$$

la prima soluzione é banale

$$x_1 = 0$$

rappresenta l'ascissa dell'origine degli assi , visto che per ipotesi il proiettile parte dall'origine degli assi.

Ricaviamo la seconda soluzione x_2

$$(-\frac{g}{2v_{i_x}^2}) \cdot x + (\frac{v_{i_y}}{v_{i_x}}) = 0 \tag{5.3}$$

$$(-\frac{g}{2v_{i_x}^2}) \cdot x = -(\frac{v_{i_y}}{v_{i_x}}) \tag{5.4}$$

moltiplichiamo la (5.4) per

$$-\frac{2v_{i_x}^2}{g}$$

otteniamo

$$x = (-\frac{2v_{i_x}^2}{g}) \cdot -(\frac{v_{i_y}}{v_{i_x}}) \tag{5.5}$$

(5.6) $$x = \frac{2v_{ix}^2 \, \cdot \, v_{iy}}{g \cdot v_{ix}}$$

(5.7) $$x_2 = \frac{2\, v_{ix} \cdot v_{iy}}{g}$$

tale equazione é l'equazione della gittata del proiettile.

Ricaviamo adesso l'**equazione della gittata in forma goniometrica**.

Dai teoremi di goniometria associati ai triangoli rettangoli sappiamo che

(5.8) $$v_{ix} = v_i \cdot \cos(\alpha)$$

(5.9) $$v_{iy} = v_i \cdot \sin(\alpha)$$

con α angolo formato dal vettore velocitá iniziale v_i e l'asse delle ascisse X.

Inseriamo le (4.1) e (4.2) nella (5.7)

(5.10) $$x_2 = \frac{2\, v_i \cdot \cos(\alpha)\, v_i \cdot \sin(\alpha)}{g}$$

(5.11) $$x_2 = \frac{2\, v_i^2 \, \cos(\alpha) \, \sin(\alpha)}{g}$$

tale equazione rappresenta l'**equazione della gittata in forma goniometrica**.

Questa formula é importantissima poiché ci da la possibiltá di calcolare la gittata in funzione dell'angolo di inclinazione α del cannone rispetto al piano orizzontale.

6. GITTATA MASSIMA

Partiamo dall'equazione della *gittata massima in forma goniometrica*.

Al fine di ottenere la massima gittata é importante che il prodotto delle componenti della velocitá iniziale

$$v_{ix} \cdot v_{iy}$$

sia massimo.

Per massimalizzare la (5.11), cioé cercare il massimo valore della gittata a paritá di velocitá iniziale , variamo unicamente l'inclinazione del cannone.

Dalla goniomeria sappiamo che il prodotto

$$\sin(\alpha)\ \cdot \cos(\alpha)$$

é massimo per

$$\alpha = 45^o = \frac{\pi}{4}\,(radianti)$$

inoltre , sappiamo che

$$\sin(45^o) = \cos(45^o) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

per calcolare la gittata massima dobbiamo inserire tali valori nell'aequazione (5.11)

$$x_{max} = \frac{2\,v_i^2\ \cdot\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \cdot\ \frac{\sqrt{2}}{2}}{g} \tag{6.1}$$

$$x_{max} = \frac{2\,v_i^2 \cdot \frac{2}{4}}{g} \tag{6.2}$$

$$x_{max} = \frac{2\,v_i^2 \cdot \frac{1}{2}}{g} \tag{6.3}$$

$$x_{max} = \frac{v_i^2}{g} \tag{6.4}$$

questa é la formula della gittata massima che si ottiene per un angolo $\alpha = 45^o = \frac{\pi}{4}$

Tale equazione ci dice che la gittata massima é funzione diretta del quadrato della velocitá iniziale e inversa rispetto al valore dell'accelerazione di gravitá. Se il colpo di cannone lo sparassimo sulla luna , dove l'accelerazione di gravitá é la sesta parte di quella della terra , il proiettile arriverebbe ovviamente, sei volte piú lontano!

7. Come colpire un punto di coordinate note !

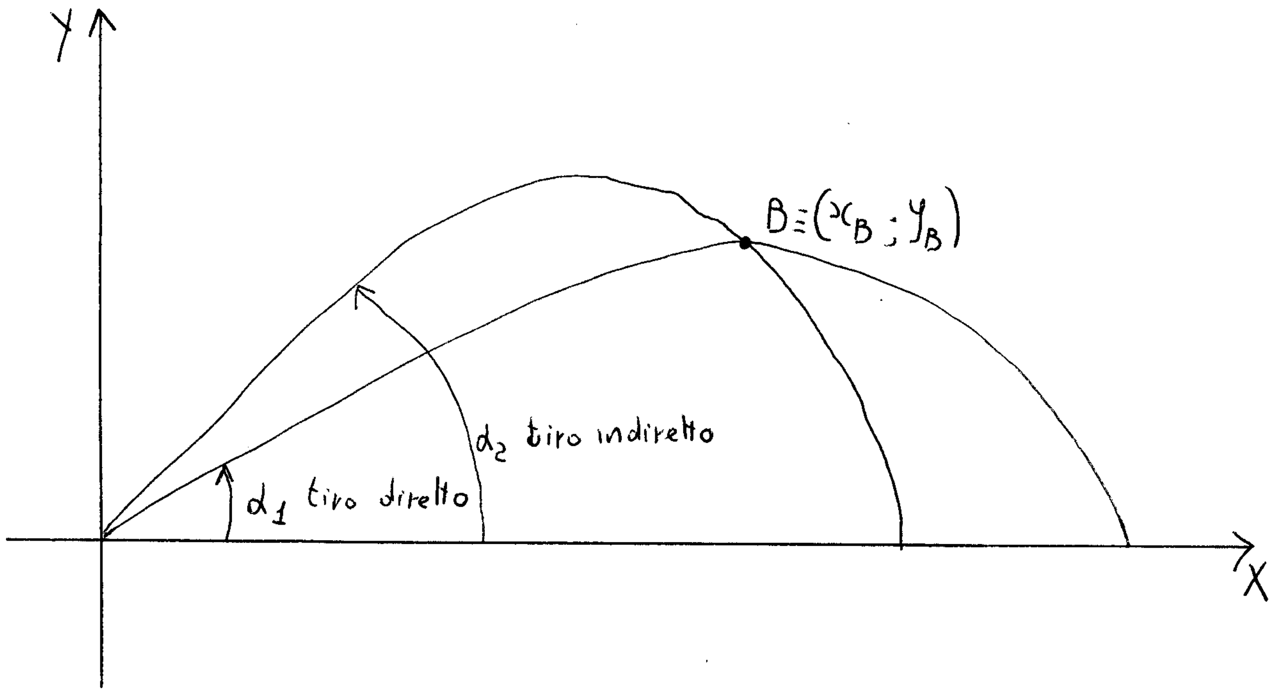

Figura 4

Supponiamo di voler colpire il punto

$$B \equiv (x_B; y_B)$$

Per analizzare questo problema dobbiamo ricorrere all'equazione del *moto del proiettile in forma goniometrica*:

$$\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_i^2} \cdot tg^2(\alpha) + \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_i^2} \; + \; tg(\alpha) \; \cdot \; x + y = 0 \tag{7.1}$$

Una volta particolarizzati i valori x e y con x_B e y_B la (7.1) sará composta dalle costanti

:

$$g, x_B, y_B, v_i$$

e la variabile sará rappresentata dalla quantitá

$$tg(\alpha)$$

che, implicitamente contiene informazioni sull'angolo α.

α indica di quanti gradi dobbiamo inclinare il cannone al fine di colpire il punto $B \equiv (x_b; y_B)$.

$$\frac{g \cdot x_B^2}{2 \cdot v_i^2} \cdot tg^2(\alpha) + \frac{g \cdot x_B^2}{2 \cdot v_i^2} + tg(\alpha) \cdot x_B + y_B = 0 \qquad (7.2)$$

Se guardiamo con attenzione tale formula, ce ne accorgiamo che avremo 2 distinti valori di $tg(\alpha)$ in quanto si tratta di equazione di secondo grado. Questo perché il punto B puó essere colpito sia per ***tiro diretto*** (fase acendente dell'arco di parabola della traiettoria del proiettile), sia per ***tiro indiretto*** (fase discendente dell'arco di parabola della traiettoria del proiettile). Ovviamente il tiro diretto lo avremo per il piú piccolo dei due valori di α.

É bene tenere presente che in balistica, utilizzando il *tiro indiretto*, si possono colpire obiettivi con ostacoli interposti tra il cannone e l'obiettivo , ad esempio si puó colpire un obiettivo al di lá di una montagna.