Lezioni e appunti di Matematica e Fisica

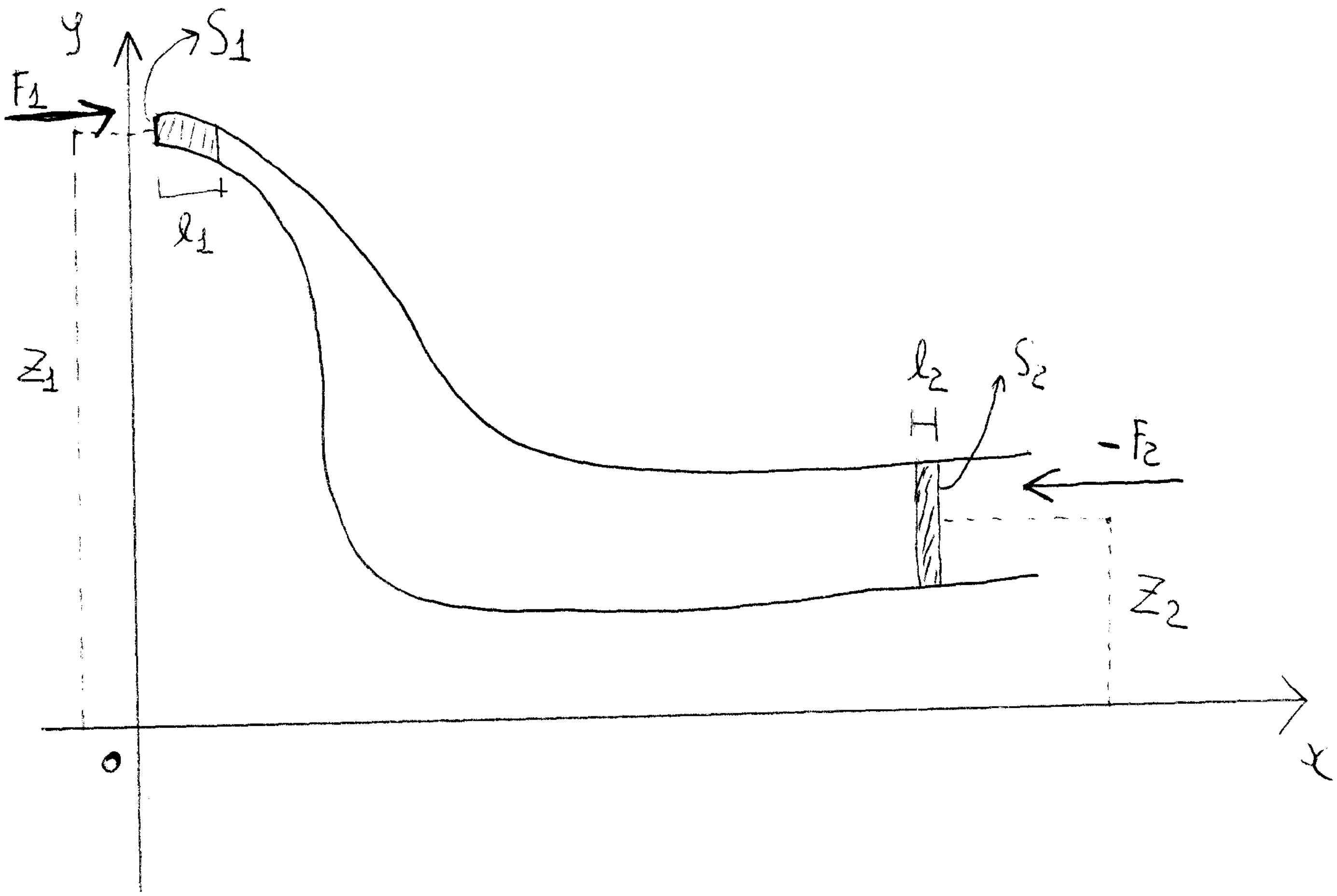
Prof. Francesco Zumbo

www.francescozumbo.it

email: zumbo2008@yahoo.it

Dinamica dei fluidi: L'equazione di Bernoulli

Dinamica dei Fluidi - Principio di Bernoulli



Supponiamo di avere un tubo a sezione variabile

Sia S_1 l'area della sezione trasversale a sinistra

e S_2 l'area della sezione trasversale a destra.

Le rispettive quote differenti sono Z_1 e Z_2

Il liquido attraversa la sezione S_1 con velocità V_1

e la sezione S_2 con velocità V_2.

Supponiamo di considerare un intervallo di tempo

Δt

Nell' intervallo di tempo Δt il liquido a sinistra ha percorso il tratto l_1 e sempre nel tempo Δt il liquido nella sezione di destra di area S_2 si è mosso del tratto l_2.

Nell' intervallo di tempo Δt sia la massa che il volume del liquido che si è mosso ~~è~~ sono le stesse, cioè il volume $S_1 \cdot l_1$ è uguale al volume $S_2 \cdot l_2$ ed anche la massa m_1 che attraversa la sezione S_1 nell' intervallo di tempo Δt a velocità V_1 è uguale alla massa m_2 che attraversa la sezione S_2 nel tempo Δt alla velocità V_2.

A sinistra di S_1 c'è del liquido che fornisce una forza F_1.

A destra di S_2 c'è anche del liquido che fornirà una forza $-F_2$ opposta a F_1.

Il teorema dell'energia cinetica afferma che "Il lavoro complessivo è uguale alla variazione dell'energia cinetica".

Indichiamo con W_{Tot} il lavoro totale e con ΔK la variazione di energia cinetica.

$$W_{Tot} = \Delta K \qquad (1)$$

Il lavoro totale è composto da:

1) Il lavoro delle forze gravitazionali che spostano il loro peso dalla quota Z_1 alla quota Z_2. Lo indichiamo con W_g.

$$W_g = m \cdot g \cdot (Z_1 - Z_2) \qquad (2)$$

2) Dal lavoro della forza F_1 che chiamiamo W_1

$$W_1 = \bar{F}_1 \cdot \bar{l}_1 \qquad (3)$$

Essendo F_1 parallelo a l_1 il coseno dell'angolo tra la forza F_1 e lo spostamento l_1 è $\cos 0° = 1$ per cui possiamo scrivere

$$W_1 = F_1 \cdot l_1 \qquad (4)$$

Analogamente si ha:

3) Il lavoro della forza $-\overline{F}_2$

$$W_2 = -F_2 \cdot l_2 \qquad (5)$$

In definitiva il lavoro totale è

$$W_{Tot} = W_g + W_1 + W_2 \qquad (6)$$

$$W_{Tot} = mg(z_1 - z_2) + F_1 \cdot l_1 - F_2\, l_2 \qquad (7)$$

Ma noi sappiamo che la pressione è

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\text{forza}}{\text{superficie}}$$

Per cui possiamo scrivere $F = p \cdot S$ in particolare

$$F_1 = P_1 \cdot S_1 \quad e \quad F_2 = P_2 \cdot S_2 \qquad (8)$$

La (7) diviene

$$W_{Tot} = m \cdot g(z_1 - z_2) + P_1 \cdot S_1 \cdot l_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot l_2 \qquad (9)$$

ma $S_1 \cdot l_1 = V_1$ (Volume della sezione 1) per cui

$$W_{Tot} = m \cdot g \cdot (z_1 - z_2) + P_1 \cdot V_1 - P_2 \cdot V_2 \qquad (10)$$

Ma essendo i liquidi incomprimibili $V_1 = V_2$

e lo poniamo $V_1 = V_2 = V$

Per cui la (10) diviene

$$W_{Tot} = m \cdot g \cdot (z_1 - z_2) + P_1 \cdot V - P_2 \cdot V \qquad (11)$$

Inoltre sappiamo che $V = \frac{m}{\rho} = \frac{\text{massa}}{\text{densità del liquido}}$

$$W_{Tot} = m \cdot g \cdot (z_1 - z_2) + P_1 \frac{m}{\rho} - P_2 \frac{m}{\rho} \qquad (12)$$

Per il teorema dell'energia cinetica deve essere

$$W_{Tot} = \Delta K \quad (13)$$

ove

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right) \quad (14)$$

Per cui si ha

$$m g (z_1 - z_2) + P_1 \frac{m}{\rho} - P_2 \frac{m}{\rho} = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right) \quad (15)$$

Dividiamo per la massa m

$$g (z_1 - z_2) + \frac{P_1}{\rho} - \frac{P_2}{\rho} = \frac{1}{2} \left(v_2^2 - v_1^2 \right) \quad (16)$$

$$g z_1 - g z_2 + \frac{P_1}{\rho} - \frac{P_2}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \quad (17)$$

Le quantità con indice 1 le scriviamo al 1° membro e quelle con l'indice 2 al 2° membro

$$g z_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = g z_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \quad (18)$$

Moltiplichiamo per la densità ρ

$$g \rho z_1 + P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = g \rho z_2 + P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (19)$$

Quindi possiamo dire che qualsiasi sezione 1 o 2 o ecc. scegliamo si ha

$$g \cdot \rho \cdot z_1 + P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \text{Costante} \quad (20)$$

Per cui generalizzando

$$g \cdot \rho \cdot z + P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante} \quad (21)$$

Con g = accelerazione di gravità; ρ = densità del liquido; p = pressione del liquido; v = velocità del liquido

La (21) è detta Equazione di Bernoulli