Disequazioni Esponenziali e Logaritmiche

Prof. Francesco Zumbo

Lezione e 20 esercizi completamente svolti

"La Matematica e la Fisica sono come un Dolce Buono,
consumato poco alla volta è Delizioso e fa Bene,
altrimenti fa male; quindi, studiate con continuità e dedizione".
"Quando sarete Docenti, ricordatevi che la migliore tecnica per insegnare è
quella di dare 100 e richiedere 90 agli studenti.
Date più di quanto chiedete."

Frasi e filosofia di Vita del **Prof. Giovanni Crupi**, Ordinario di Meccanica Razionale e Relatività
Università degli Studi di Messina, Scienziato Calabrese contemporaneo, nato a Bova Marina (RC).

Con Perenne Stima e Continua costante Ammirazione,

Dedico a Lui questo lavoro scientifico didattico.

Prof. Francesco Zumbo

zumbo2008@yahoo.it

PARAGRAFI TRATTATI

1. LA FUNZIONE ESPONENZIALE

La funzione esponenziale é una funzione definita in $\mathbb{R}$ (numeri Reali) a valori in $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Tale funzione considera una base $a > 0$ e $\forall x \in \mathbb{R}$ associa la quntitá

$$y = f(x) = a^x$$

La variabile x é l'esponente della base a.

Esempi di potenze:

$2^3 = 8$; $5^3 = 125$; $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ecc.

come vedremo meglio in seguito, i grafici della funzione esponenziale sono diversi e distinti a seconda se la base $a > 1$ oppure $a\ : 0 < a < 1$.

Il codominio , cioé l'insieme dei valori assunti dalle funzioni esponenziali é

$$\mathbb{R}^+ - \{0\}$$

Se $a > 1$

e x tende a $+\infty \Rightarrow a^x$ tende a $+\infty$,

mentre

se x tende a $-\infty \Rightarrow a^x$ tende a 0.

La funzione é crescente e sempre positiva.

Invece se $0 < a < 1$

e x tende a $+\infty \Rightarrow a^x$ tende a 0

mentre

se x tende a $-\infty \Rightarrow a^x$ tende a $+\infty$.

La funzione é decrescente ma sempre positiva.

2. Grafici della Funzione Esponenziale

1. Grafico Funzione Esponenziale $y = a^x$ con base $a > 1$, la funzione é crescente

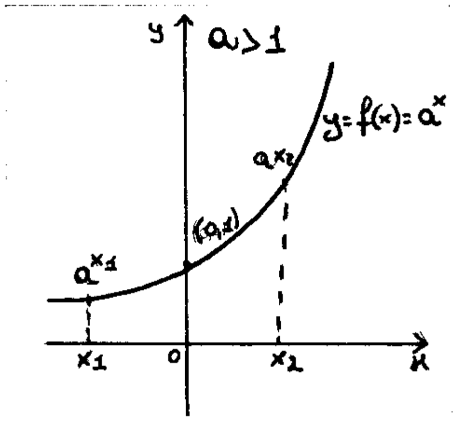


Figura 1 - a^x - con $a > 1$

2. Grafico Funzione Esponenziale $y = a^x$ con base $0 < a < 1$ la funzione é decrescente:

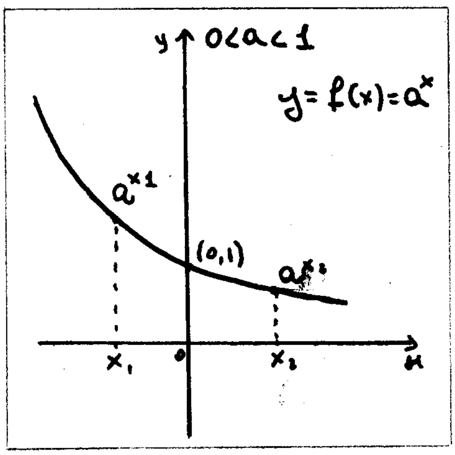


Figura 2 - a^x - con $0 < a < 1$

Le funzioni esponenziali , indipendentemente dalla base scelta, che comunque deve essere > 0 *passano sempre per il punto* $(0; 1)$

3. Proprietá delle Potenze

Il prodotto di due potenze che hanno la stessa base é uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti:

$$x^m \cdot x^n =^{def} x^{m+n} \tag{3.1}$$

Il rapporto di due potenze che hanno la stessa base é uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti:

$$x^m : x^n =^{def} x^{m-n} \tag{3.2}$$

Una potenza ad esponente negativo equivale ad una frazione che ha 1 al numeratore e al denominatore la potenza con esponente positivo:

$$x^{-m} =^{def} \frac{1}{x^m} \tag{3.3}$$

Il prodotto di due potenze che hanno lo stesso esponente equivale ad una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente:

$$x^m \cdot y^m =^{def} (x\,y)^m \tag{3.4}$$

Il quoziente di due potenze che hanno diversa base ed uguale esponente , equivale ad una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente:

$$x^m : y^m =^{def} (x : y)^m \tag{3.5}$$

La potenza di una potenza é una potenza che ha la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti:

$$(x^m)^n =^{def} x^{m\,n} \tag{3.6}$$

Una potenza ad esponente frazionario é un radicale che ha come indice di radice il denominatore della frazione e come esponente dell'argomento il numeratore della frazione :

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \tag{3.7}$$

4. I Logaritmi

4.1. **Definizione di Logaritmo.** La scrittura

$$a^x = b \tag{4.1}$$

con $a > 0$ e $a \neq 1$

ricerca il valore della x che sostituito nell'equazione (4.1) fa ottenere l'identitá.

Tale x vale

$$\boxed{x =^{def} \lg_a b} \tag{4.2}$$

si legge ***logaritmo in base*** a ***di*** b ***uguale*** x.

Definizione di Logaritmo:

Il logaritmo é l'esponente x a cui bisogna elevare la base a per ottenere il numero dato b.

Inserendo la (4.2) nella (4.1) si arriva ad una importante proprietá dei logaritmi.

$$\boxed{a^{log_a b} = b} \tag{4.3}$$

La funzione esponenziale e la funzione logaritmica ***si semplificano****, poiché una é la funzione inversa dell'altra, é importante che la base della potenza e la base del logaritmo abbiano lo stesso valore.*

Ad esempio vale l'identitá

$$7 = 5^{\lg_5 7} \tag{4.4}$$

É importante osservare che:

1) Non esistono logaritmi di base: negativa, 0 , 1.

2) Non esistono logaritmi di argomenti: negativi, 0.

3) $\lg_a 1 = 0 \; \forall \; base \; a > 0$

infatti $a^x = 1$ qualsiasi sia la base, é vera solo se $x = 0$ e passando ai logaritmi di ambo i membri

$$\lg_a \, a^x = \lg_a \, 1$$

cioé

$$x = \lg_a \, 1$$

da cui necessariamente deve essere, per la definizione di logaritmo

$$0 = \lg_a \, 1$$

4.2. **Alcuni esempi di logaritmi.** .

1) $\lg_3 9 = 2$ infatti $3^2 = 9$

2) $\lg_{\frac{3}{5}} \frac{9}{25} = 2$ infatti $(\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{25}$

3) $\lg_{10} 1 = 0$ infatti $10^0 = 1$

5. Grafici della Funzione Logaritmica

3. Grafico Funzione Logaritmica $y = \lg_a x$ **con base** $a > 1$ **la funzione é crescente**:

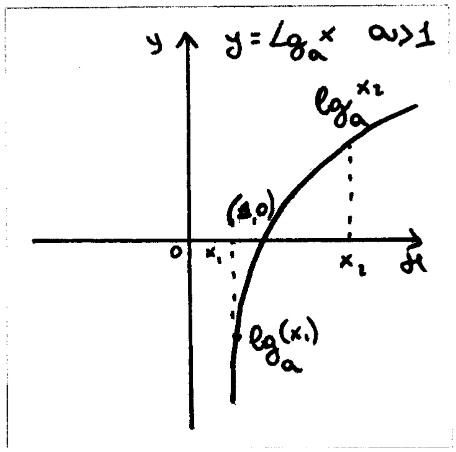


Figura 3 - $\lg_a x$ con $a > 1$

4. Grafico Funzione Logaritmica $y = \lg_a x$ **con base** $0 < a < 1$ **la funzione é decrescente**:

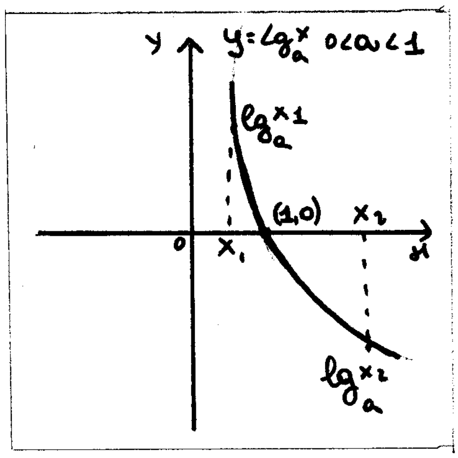


Figura 4 - $\lg_a x$ con $0 < a < 1$

Le funzioni logaritmiche, ***che necessariamente devono avere base positiva*** $a > 0,\ a \neq 1$ ***e argomento positivo*** $b > 0$*, passano tutte per il punto* $(1; 0)$.

6. Principali proprietá dei Logaritmi

La proprietá vista in precedenza:

$$x = a^{\lg_a x} \tag{6.1}$$

(*esponenziale e logaritmo si elidono , poiché una é funzione inversa dell'altra).*

la si puó generalizzare ponendo

$$x = f(x)$$

$$f(x) = a^{\lg_a f(x)} \tag{6.2}$$

ad esempio:

$$\sin(x) = a^{\lg_a \sin(x)} \tag{6.3}$$

Il $\lg_a b$ *é uguale all'opposto del logaritmo del reciproco dell'argomento :*

$$\boxed{\lg_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = -\lg_{\mathbf{a}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}}} \tag{6.4}$$

esempio

$$\lg_3 27 = -\lg_3 \frac{1}{27} \tag{6.5}$$

Il $\lg_a b$ *é uguale all'opposto del logaritmo nella base reciproca* $\frac{1}{a}$ *dell'argomento* b*:*

$$\boxed{\lg_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = -\lg_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}} \mathbf{b}} \tag{6.6}$$

esempio

$$\lg_3 27 = -\lg_{\frac{1}{3}} 27 \tag{6.7}$$

Il $\lg_a b$ *é uguale al logaritmo del reciproco di* b *nella base reciproca di* a*:*

(6.8) $$\boxed{\lg_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \lg_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}}}$$

esempio

(6.9) $$\lg_5 7 = \lg_{\frac{1}{5}} \frac{1}{7}$$

Il $\lg_a b$ *é uguale al reciproco del logaritmo cui si inverte la base con l'argomento:*

(6.10) $$\boxed{\lg_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{1}}{\lg_{\mathbf{b}} \mathbf{a}}}$$

esempio

(6.11) $$\lg_5 13 = \frac{1}{\lg_{13} 5}$$

7. Operazioni con i Logaritmi

Logaritmo del Prodotto

Il logaritmo di un prodotto é uguale alla somma dei logaritmi.

(7.1) $$\lg_a(f \cdot g) = \lg_a f + \lg_a g$$

Logaritmo del Quoziente

Il logaritmo del quoziente é uguale alla differenza tra il logaritmo del numeratore e quello del denominatore:

(7.2) $$\lg_a(\frac{f}{g}) = \lg_a f - \lg_a g$$

Logaritmo di una Potenza

Il logaritmo di una potenza é uguale all'esponente della potenza per il logaritmo della base della potenza:

(7.3) $$\lg_a f^g = g \lg_a f$$

Logaritmo di un Radicale

(7.4) $$\lg_a \sqrt[n]{f^m} = \frac{m}{n} \lg_a f$$

ció proviene da

(7.5) $$\lg_a \sqrt[n]{f^m} = \lg_a f^{\frac{m}{n}} =$$

(per una delle proprietá dei logaritmi)

(7.6) $$= \frac{m}{n} \lg_a f$$

quindi in definitiva vale la (7.7)

$$\lg_a \sqrt[n]{f^m} = \frac{m}{n} \lg_a f \tag{7.7}$$

8. Proprietá del Cambiamento di Base

Dato il

$$\lg_a b \tag{8.1}$$

se vogliamo utilizzare una base $c \neq a$ basta considerare

$$\lg_a b = \frac{\lg_c b}{\lg_c a} \tag{8.2}$$

Il $\lg_a b$ é uguale al logaritmo nella nuova base "c" dell'argomento "b", fratto il logaritmo di base la nuova base "c" e di argomento la vecchia base "a".

9. Ulteriori proprietá dei Logaritmi

Proprietá che derivano dalle proprietá precedenti:

$$\boxed{\lg_a a^{f(x)} = f(x) \lg_a a = f(x)} \tag{9.1}$$

inoltre

$$\boxed{\lg_a b^{g(x)} = g(x) \lg_a b} \tag{9.2}$$

Dalla proprietá

$$a^{\lg_a f(x)} = f(x) \tag{9.3}$$

e dalla proprietá del cambiamento di base (8.2), si giunge ad una importantissima proprietá molto utile nello studio delle *equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche:*

(9.4) $$a^{\lg_b f(x)} = a^{\frac{\lg_a f(x)}{\lg_a b}} = \{a^{\lg_a f(x)}\}^{\frac{1}{\lg_a b}} = \{f(x)\}^{\frac{1}{\lg_a b}}$$

come vedremo in seguito la (9.3) e la (9.4) avranno un ruolo fondamentale nelle disequazioni logaritmiche.

10. Notazioni

Si indicano con

- $\lg_a(x)$ il generico logaritmo nella base a;
- $Log(x)$ o con $\lg_{10}(x)$ il logaritmo in base 10, detto anche logaritmo decimale;
- $\ln x$ o $\lg_e(x)$ oppure $lg\,x$ il logaritmo naturale detto anche neperiano, cioé il logaritmo nella base $e = 2,718...$

11. Convenzioni sulla rappresentazione grafica delle soluzioni

Quando si studia il prodotto di fattori in una disequazione, oppure disequazioni razionali fratte, o altre disequazioni dove é importante non soltanto sapere dove c'é la soluzione, ma é importante conoscere il segno che essa assume nell'intervallo di soluzione, *indicheremo tali intervalli con i segni (+ o -), che vengono assunti*.
Quando ció non serve , come nello studio dei sistemi di disequazioni , dove é importante conoscere dove c'é e dove non c'é la soluzione indipendentemente dal segno di questa, *indicheremo la soluzione con una linea continua*.
É importante osservare che se abbiamo un sistema del tipo

$$\begin{cases} 2x+1>0 \\ 3x^2-2x>0 \\ x-7<0 \end{cases} \tag{11.1}$$

che studia l'intersezione delle 3 equazioni risolte ciascuna per proprio conto , si indica la soluzione di ognuna mediante una linea continua , indipendentemente se tale soluzione é >0 oppure <0.
Infatti puó essere chiesto che la 1^a disequazione sia >0, la 2^a disequazione >0 e la 3^a disequazione sia <0.
L'intersezione delle 3 soluzioni rappresentata mediante linea continua ci garantisce che i valori della soluzione, sostituiti nelle disequazioni iniziali, assumono i segni corrispondenti alle disequazioni stesse, cioé che la 1^a sia >0, la 2^a sia >0 e la 3^a sia <0.

12. Disequazioni esponenziali

Una disequazione esponenziale é una disequazione dove la variabile x compare all'esponente di una base.

Ad esempio é una disequazione esponenziale la scrittura

$$3^{x+1} + 2^x \geq 2 \tag{12.1}$$

Ogni disequazione esponenziale occorre ricondurla *ad una o piú disequazioni* nella forma

$$a^{\,f(x)} \lesseqgtr b^{\,g(x)} \tag{12.2}$$

a questo punto si applica la funzione $\lg_a$ oppure $\lg_b$ all'equazione (12.2)

é importante tenere presente che se la base del logaritmo é > 1 ***il logaritmo é crescente e non si inverte il senso della disequazione*** (12.2)***, mentre se la base del logaritmo é*** $0 < a < 1$ ***il logaritmo é decrescente e si inverte il senso della disequazione.***

Tale osservazione é importantissima e deriva dall'analisi della crescenza e decrescenza del grafico del logaritmo.

Supponiamo, quanto per fissare le idee di avere la disequazione nella forma

$$a^{f(x)} < b^{g(x)}$$

con base $a > 1$.

Applichiamo $\lg_a$ ad ambo i membri della (12.2).

É importante notare che le quantitá $a^{\,f(x)}$ e $b^{\,g(x)}$ in tale riflessione, le stiamo immaginando posizionate sull'asse delle X, quindi $\lg_a a^{f(x)}$ e $\lg_a b^{g(x)}$ appartengono all'asse Y , cioé divengono ordinate dei grafici di lunzioni logaritmiche.

(12.3) $$\lg_a \; a^{\,f(x)} < \lg_a b^{\,g(x)}$$

ma per le equazioni (9.1) e (9.2) si ha

(12.4) $$f(x) \cdot \lg_a a < g(x) \cdot \lg_a b$$

cioé

(12.5) $$f(x) < \; g(x) \; \lg_a b$$

in tale forma la disequazione é sostanzialmente risolta o quantomeno non é piú una disequazione esponeziale, nella maggior parte dei casi é una disequazione razionale.
La variabile x non sará piú presente come esponente di una base, quindi si é abbassato notevolmente il livello di difficoltá della disequazione.
Se avessimo avuto la base a tale che $0 < a < 1$ applicando il $\lg_a$ ad ambo i membri, avremmo dovuto invertire il senso della disequazione (12.3).

Nel caso in cui si riesce ad ottenere la disequazione esponenziale nella forma con uguali basi:

(12.6) $$a^{f(x)} \lesseqgtr a^{g(x)}$$

il calcolo é piú immediato, infatti i passaggi precedenti si specializzano , applicando $\lg_a$

Se la base $a > 1$ ad ambo i membri della

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \tag{12.7}$$

applichiamo $\lg_a$

$$\lg_a\, a^{f(x)} < \lg_a\, a^{g(x)} \tag{12.8}$$

$$f(x)\lg_a\, a < g(x)\, \lg_a\, a \tag{12.9}$$

ed essendo $\lg_a a = 1$ tutto si riconduce allo studio della disequazione degli esponenti:

$$f(x) < g(x) \tag{12.10}$$

Se invece la base $0 < a < 1$ si applica sempre $\lg_a$ ma si inverte il senso della disequazione.

Da

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \tag{12.11}$$

si ottiene

$$\lg_a a^{f(x)} > \lg_a a^{g(x)} \tag{12.12}$$

$$f(x)\lg_a a > g(x)\lg_a a$$

ed essendo $\lg_a a = 1$ si ottiene

$$f(x) > g(x) \tag{12.13}$$

13. Disequazioni logaritmiche

Una disequazione é logaritmica se la variabile (ad esempio x) é presente nell'argomento del logaritmo.

Un esempio di disequazione logaritmica é

$$\lg_3(x+1) - 3\lg_3 x < 2 \tag{13.1}$$

Una disequazione logaritmica puó essere ricondotta applicando le proprietá delle funzioni esponenziali e delle funzioni logaritmiche ad una o piú disequazioni del tipo

$$\lg_a f(x) \lesseqgtr \lg_b g(x) \tag{13.2}$$

Dato che la funzione logaritmica é una funzione che lavora esclusivamente con argomenti positivi (> 0), occorre che si determini la **Condizione di Esistenza**, cioé si deve studiare il sistema:

$$\begin{cases} \text{argomento del primo } \lg > 0 \\ \text{argomento del secondo } \lg > 0 \\ \text{ecc.} > 0 \end{cases} \tag{13.3}$$

nel caso della (13.2)

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \tag{13.4}$$

Nell'esempio precedente (13.1), la condizione di esistenza é rappresentata dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \tag{13.5}$$

Tale Soluzione di Esistenza la indichiamo con

$$S_{esistenza} = Intersezione\ di\ tutti\ gli\ argomenti\ dei\ logaritmi\ posti\ > 0$$

Soluzione Totale della Disequazione Logaritmica

É soluzione Totale S_{Totale} della disequazione logaritmica l'insieme soluzione della Condizione di Esistenza $S_{esistenza}$ intersecato con la soluzione della Disequazione Logaritmica S_{lg}.

$$S_{Totale} = S_{esistenza} \cap S_{lg}$$

Potrebbe accadere che c'é la Soluzione di Esistenza , c'é la soluzione della logaritmica, ma

$$S_{Totale} = S_{esistenza} \cap S_{logaritmica} = \phi$$

in tal caso la disequazione logaritmica **non ha soluzione**.

Potrebbe anche accadere che c'é la Soluzione della disequazione S_{lg} , ma sia vuoto l'insieme della Condizione di Esistenza, $S_{esistenza} = \phi$, in tal caso

$$S_{Totale} = S_{lg} \cap S_{esistenza} = S_{lg} \cap \phi = \phi$$

anche in questo caso non c'é la soluzione Totale.

Ovviamente se $S_{esistenza} \neq \phi$ mentre $S_{logaritmica} = \phi$ **non c'é Soluzione Totale**.

Supponiamo di voler risolvere l'equazione (13.2) nel caso in cui si presenta nella forma

$$\lg_a f(x) > \lg_b g(x) \tag{13.6}$$

A questo punto applichiamo la funzione esponenziale

a^x oppure la b^x ad ambo i membri,

se a o b sono > 1 la disequazione (13.6) non cambia senso , mentre se sono $0 < a < 1$ oppure $0 < b < 1$ cambierá il senso della disequazione (13.6).

Come detto in precedenza:

Se si applicano funzioni Crescenti il senso di una disequazione non cambia, altrimenti se si applicano funzioni decrescenti il senso della disequazione cambia.

Se la funzione esponenziale ha la $base > 1$ *é crescente ,di conseguenza non fará cambiare senso alla disequazione; mentre se* $0 < base < 1$*, la funzione esponenziale sará decrescente e cambierá il senso della disequazione*

Supponiamo che sia $0 < a < 1$ e applichiamo a^x alla (13.6)

$$a^{\lg_a f(x)} < a^{\lg_b g(x)} \tag{13.7}$$

al primo membro applichiamo la (9.3), mentre al secondo membro l'importantissima (9.4) , formula che deriva dalla formula del cambiamento di base.

Cambiamo la base b nella base a

$$f(x) < a^{\frac{\lg_a g(x)}{\lg_a b}} = [a^{\lg_a g(x)}]^{\frac{1}{\lg_a b}} \tag{13.8}$$

inoltre essendo $a^{\lg_a}$ la composizione di una funzione e della propria inversa, si ottiene

$$f(x) < [g(x)]^{\frac{1}{\lg_a b}} \tag{13.9}$$

La (13.9) é la disequazione cercata , infatti la variabile non é piú presente nell' argomento del logaritmo e la quantiá

$$\frac{1}{\lg_a b} \tag{13.10}$$

é una costante.

Nel caso in cui le basi del logaritmo della disequazione logaritmica iniziale (13.6) sono le stesse, la (13.10) diviene 1 quindi la disequazione risolvente (13.9) si semplifica nella

$$f(x) \, < \, g(x) \tag{13.11}$$

Dopo aver risolto la (13.9) ,chiamiamo $S_{\lg}$ l'insieme delle soluzioni della disequazione logaritmica data.

La soluzione totale é data dall'intersezione di tali insiemi di soluzione:

$$S_{Totale} = \; S_{\lg} \cap \; S_{esistenza} \tag{13.12}$$

In altri simboli :

$$S_{Totale} = \; S_{della\ dis.\ logaritmica} \cap \; S_{delle\ condizioni\ di\ esistenza} \tag{13.13}$$

14. Esempi svolti di Disequazioni Esponenziali

14.1. **Esempio N1.** Risolviamo la seguente disequazione :

$$\frac{3^x \cdot 2^{1+x}}{3 \cdot 2^{x-1}} > \sqrt{\frac{6^x}{3^{x-1}}} \tag{14.1}$$

utilizziamo le proprietá delle potenze per scrivere in diversa forma sia il primo che il secondo membro

$$3^{x-1} \cdot 2^{1+x-x+1} > \sqrt{\frac{2^x \cdot 3^x}{3^{x-1}}} \tag{14.2}$$

$$3^{x-1} \cdot 2^2 > \sqrt{2^x \cdot 3^{x-x+1}} \tag{14.3}$$

$$3^{x-1} \cdot 2^2 > \sqrt{2^x \cdot 3} \tag{14.4}$$

essendo entrambi i membri sempre positivi $\forall x$ eleviamo al quadrato al fine di eliminare la radice quadrata

$$3^{2x-2} \cdot 2^4 > 2^x \cdot 3 \tag{14.5}$$

dividiamo per $3 \cdot 2^4$ in modo da ottenere al primo membro la base 3 e al secondo la base 2

$$\frac{3^{2x-2} \cdot 2^4}{3 \cdot 2^4} > \frac{2^x \cdot 3}{3 \cdot 2^4} \tag{14.6}$$

cioé

$$3^{2x-3} > 2^{x-4} \tag{14.7}$$

a questo punto,come raccomandato nei paragrafi precedenti, applichiamo la funzione logaritmica ad ambo i membri. É conveniente applicare $\lg_3$ oppure $\lg_2$.

Applichiamo ad ambo i membri $\lg_3$ e visto che la base 3 é ovviamente > 1 il senso della disequazione (14.7) rimane inalterato.

(14.8) $$\lg_3 \ 3^{2x-3} > \lg_3 \ 2^{x-4}$$

per la proprietá del logaritmo di una potenza si ha

(14.9) $$(2x-3)\lg_3 \ 3 > (x-4)\lg_3 \ 2$$

e sapendo che $\lg_3 \ 3 = 1$, si ottiene

(14.10) $$2x-3 > (x-4)\lg_3 \ 2$$

moltiplichiamo

(14.11) $$2x-3 > x \ \lg_3 \ 2 - 4 \ \lg_3 \ 2$$

portiamo le quantitá in x al primo membro e le costanti al secondo membro

(14.12) $$2x - x \ \lg_3 \ 2 > 3 - 4 \ \lg_3 \ 2$$

mettiamo la x in evidenza

(14.13) $$x\,(2-\lg_3 \ 2) > 3 - 4 \ \lg_3 \ 2$$

da cui

(14.14) $$x > \frac{3 - 4 \ \lg_3 \ 2}{2 - \lg_3 \ 2}$$

cioé

(14.15) $$x > \frac{3 - \lg_3 2^4}{2 - \lg_3 2}$$

quindi la soluzione definitiva la possiamo scrivere nella forma

$$x > \frac{3 - \lg_3 16}{2 - \lg_3 2} \tag{14.16}$$

Per tracciare il grafico di tale risultato dobbiamo ricavare il decimale della (14.16).

Se la calcolatrice non ha la scelta della base del logaritmo, basta utilizzare la formula del cambiamento di base e convertire i logaritmi da una base qualsiasi alla base 10.

Mettiamo nella forma con i logaritmi in base 10 la soluzione (14.16) :

$$x > \frac{3 - \lg_3 16}{2 - \lg_3 2} = \frac{3 - \frac{\lg_{10} 16}{\lg_{10} 3}}{2 - \frac{\lg_{10} 2}{\lg_{10} 3}} = \tag{14.17}$$

$$= \frac{\frac{3 \lg_{10} 3 - \lg_{10} 16}{\lg_{10} 3}}{\frac{2 \lg_{10} 3 - \lg_{10} 2}{\lg_{10} 3}} =$$

$$= \frac{3 \lg_{10} 3 - \lg_{10} 16}{\lg_{10} 3} \cdot \frac{\lg_{10} 3}{2 \lg_{10} 3 - \lg_{10} 2} =$$

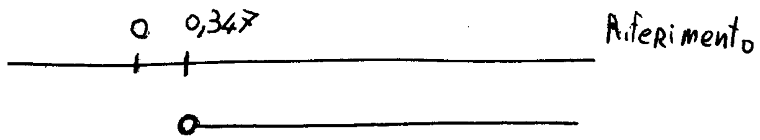
$$= \frac{\lg_{10} 3^3 - \lg_{10} 16}{\lg_{10} 3^2 - \lg_{10} 2} =$$

$$= \frac{\lg_{10} \frac{27}{16}}{\lg_{10} \frac{9}{2}} = \tag{14.18}$$

$$= \frac{\lg_{10} 1,6875}{\lg_{10} 4,5} =$$

a questo punto calcoliamo con la calcolatrice il valore dei logaritmi in base 10

$$= \frac{0,2272437815}{0,6532125137} = 0,3478864484$$



Riassumendo, la disequazione ha soluzione decimale

$$x > 0,3478864484 \tag{14.19}$$

é importante scrivere la soluzione nella forma decimale oltre che nella forma razionale, poiché soltanto conoscendo il valore decimale é possibile tracciare il grafico, essendo impossibile graficizzare la soluzione nella forma razionale (14.16).

Al fine di essere completi possiamo scrivere un ulteriore passaggio della (14.18) utilizzando la lettura da sinistra verso destra della formula del cambiamento di base

$$\frac{\lg_{10}\frac{27}{16}}{\lg_{10}\frac{9}{2}} = \lg_{\frac{9}{2}}\frac{27}{16} \tag{14.20}$$

Soluzione espressa mediante intervalli su $\mathbb{R}$

La soluzione

$$x > \frac{3-\lg_3 16}{2-\lg_3 2}$$

espressa mediante intervalli diviene

$$x \in \left]\, \frac{3-\lg_3 16}{2-\lg_3 2};\ +\infty\right[$$

oppure esprimendo la soluzione in forma decimale

$$x \in]0,3478864484\ ;\ +\infty[$$

Nota la soluzione in forma decimale é immediato porla in modo grafico.

14.2. **Esempio N2.** Risolviamo la disequazione esponenziale

$$\frac{2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{3 - x} > 0 \tag{14.21}$$

É una disequazione fratta, quindi studiamo in modo indipendente il numeratore

$$N(x) > 0$$

e il denominatore

$$D(x) > 0$$

Analizziamo $N(x) > 0$:

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 > 0 \tag{14.22}$$

lo scriviamo in una forma piú conveniente

$$2^{2x} - 3 \cdot 2 \cdot 2^{x} + 8 > 0 \tag{14.23}$$

poniamo la sostituzione $2^x = y$

per tale sostituzione la (14.23) diviene

$$y^2 - 3 \cdot \cdot 2 \cdot y + 8 > 0 \tag{14.24}$$

$$y^2 - 6y + 8 > 0 \tag{14.25}$$

troviamo le soluzioni dell'equazione associata alla disequazione (14.25)

$$y^2 - 6y + 8 = 0 \tag{14.26}$$

che é del tipo

$$ay^2 + by + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(8) = 36 - 32 = 4 \tag{14.27}$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm 2}{2} \tag{14.28}$$

separando il $+$ dal $-$ si hanno le due soluzioni

$$y_1 = 4 \tag{14.29}$$

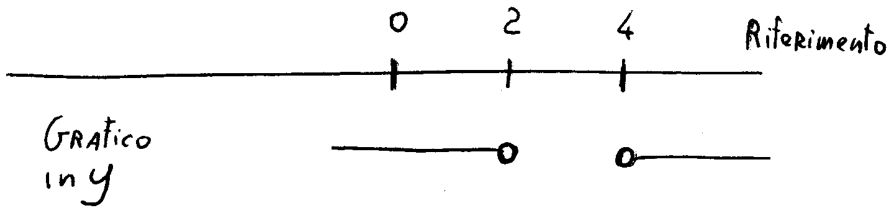
$$y_2 = 2 \tag{14.30}$$

la disequazione (14.25) é della famiglia > 0 e le soluzioni di (14.26) sono Reali e distinte, la disequazione é risolta per valori positivi esterni rispetto alle soluzioni dell'equazione associata (14.25).

La soluzione nella variabile y della disequazione (14.25) descritta mediante intervalli é

$$y \in]-\infty\,;2[\,\cup\,]4\,;+\infty[\tag{14.31}$$

Grafico della soluzione nella variabile y



Ancora la disequazione non é del tutto risolta , a tal fine, dobbiamo tornare alla variabile x , dove la sostituzione utilizzata era

$$2^x = y$$

dapprima studiamo

$$2^x = y_1 \tag{14.32}$$

cioé

$$2^x = 2$$

quindi

$$x = 1$$

Analogamente studiamo

$$2^x = y_2$$

$$2^x = 4$$

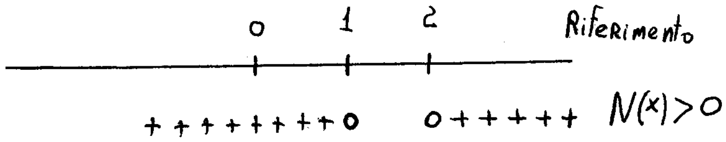
$$2^x = 2^2$$

da cui

$$x = 2$$

In definitiva la soluzione di $N(x) > 0$ é

(14.33) $$x \ \in]-\infty\,; 1[\,\cup\,]2\,; +\infty[$$



descriviamo tale soluzione mediante rappresentazione caratteristica

(14.34) $$S_{N(x)>0} = \{x : -\infty < x < 1 \cup 2 < x < +\infty\}$$

Studiamo il denominatore $D(x) > 0$

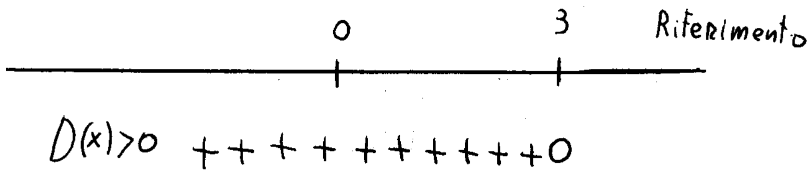
$$3 - x > 0$$

$$3 > x$$

$$x < 3$$

Il denominatore é positivo $\forall x < 3$

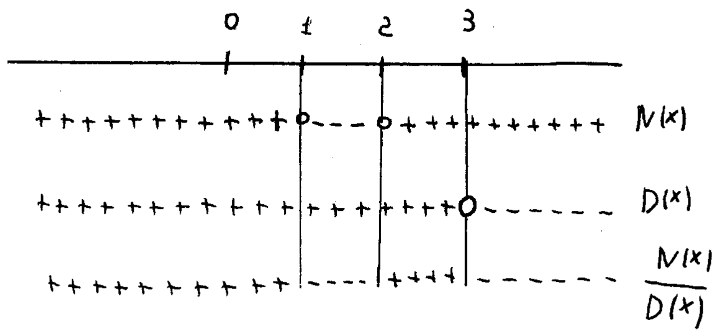
Cioé $D(x) > 0$ per $x < 3$



Studiamo adesso

$$\frac{N(x)}{D(x)} > 0 \tag{14.35}$$

lo si studia graficamente



Da cui , $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$

$$\forall x : -\infty < x < 1 \;\cup\; 2 < x < 3$$

descritta mediante intervalli

$$x \in]-\infty; 1[\cup]2; 3[$$

14.3. **Esempio N. 3.** Risolviamo la disequazione

$$\frac{(\frac{2}{3})^{x-1}-1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2^{x-1}}}<0 \tag{14.36}$$

é una disequazione esponenziale inserita in una razionale fratta. Come si conviene con le razionali fratte poste nella forma della (14.36) studiamo $N(x) > 0$, $D(x) > 0$ e successivamente studieremo il segno di

$$\frac{N(x)}{D(x)}$$

per cercare dove é < 0.

Analizziamo $N(x) > 0$:

$$(\frac{2}{3})^{x-1}-1>0 \tag{14.37}$$

$$(\frac{2}{3})^{x-1}>1 \tag{14.38}$$

ma $1 = (\frac{2}{3})^0$

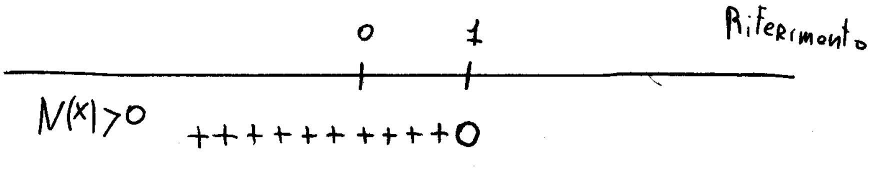
$$(\frac{2}{3})^{x-1}>(\frac{2}{3})^0 \tag{14.39}$$

a questo punto applichiamo la funzione logaritmica $\lg_{\frac{2}{3}}$ ad ambo i membri ricordando che essendo $0 < \frac{2}{3} < 1$ bisogna invertire il senso della (14.39)

$$\lg_{\frac{2}{3}}(\frac{2}{3})^{x-1}<\lg_{\frac{2}{3}}(\frac{2}{3})^0 \tag{14.40}$$

$$x-1<0$$

$N(x) > 0$ per $x < 1$



Studiamo $D(x) > 0$

$$\sqrt{2} - \sqrt[3]{2^{x-1}} > 0 \tag{14.41}$$

$$\sqrt{2} > \sqrt[3]{2^{x-1}} \tag{14.42}$$

$$(2)^{\frac{1}{2}} > 2^{\frac{x-1}{3}} \tag{14.43}$$

eleviamo al cubo entrambi i membri

$$[(2)^{\frac{1}{2}}]^3 > [2^{\frac{x-1}{3}}]^3 \tag{14.44}$$

$$2^{\frac{3}{2}} > 2^{\frac{x-1}{3} \cdot 3}$$

$$2^{\frac{3}{2}} > 2^{x-1}$$

$$2^{x-1} < 2^{\frac{3}{2}} \tag{14.45}$$

applichiamo la funzione $\lg_2$. Essendo la base > 1 non si deve invertire il senso della disequazione

$$\lg_2 2^{x-1} < \lg_2 2^{\frac{3}{2}} \tag{14.46}$$

$$(x-1) \cdot \lg_2 2 < \frac{3}{2}$$

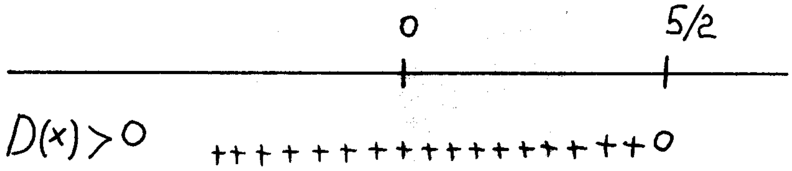
$$x - 1 < \frac{3}{2} \tag{14.47}$$

$$x < \frac{3}{2} + 1$$

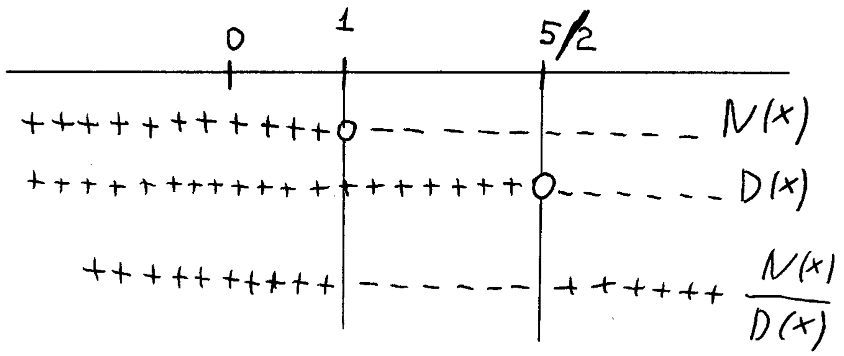
$$x < \frac{3+2}{2}$$

Da cui $D(x) > 0$ se

$$x < \frac{5}{2} \tag{14.48}$$



Studiamo adesso il grafico del segno $\frac{N(x)}{D(x)}$



L'esercizio cerca dove $\frac{N(x)}{D(x)} < 0$, pertanto la soluzione finale é

$$S_{Totale} = x : 1 < x < \frac{5}{2} \tag{14.49}$$

che descritta mediante intervalli diviene

(14.50) $$S_{Totale} =]1;\ \frac{5}{2}[$$

15. Esempi svolti di Disequazioni Logaritmiche

15.1. Esempio N1. Risolviamo da disequazione logaritmica

$$\lg_5(x-7) > 2 \tag{15.1}$$

scriviamo la disequazione in modo differente ricordando che $2 = \lg_5 5^2$

$$\lg_5(x-7) > \lg_5 5^2 \tag{15.2}$$

applichiamo ad ambo i membri la funzione esponenziale di base 5 ed essendo la base > 1 non si inverte il senso della disequazione

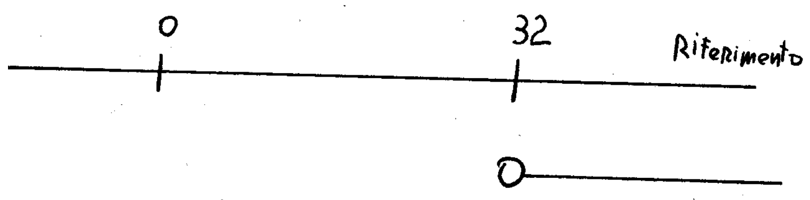
$$5^{\lg_5(x-7)} > 5^{\lg_5 5^2} \tag{15.3}$$

per le proprietá viste in precedenza

$$x - 7 > 5^2 \tag{15.4}$$

$$x > 25 + 7 \tag{15.5}$$

$$x > 32 \tag{15.6}$$



la soluzione della disequazione per la parte logaritmica é:

$$S_{lg} = \{x > 32\} \tag{15.7}$$

Studiamo la **Condizione di Esistenza del logaritmo**, cioé dobbiamo porre l'argomento del logaritmo > 0.

Piccola parentesi:

se ci fossero stati piú logaritmi, ed esempio:

$$\lg A(x) + \lg B(x) > \lg C(x) + D(x)$$

la Condizione di Esistenza é la soluzione del sistema

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases}$$

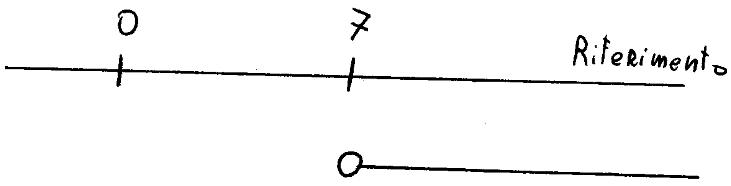
chiusa parentesi.

Torniamo al nostro esercizio e studiamo la Condizione di Esistenza

$$x - 7 > 0 \tag{15.8}$$

$$x > 7 \tag{15.9}$$

$$S_{esistenza} = \{x > 7\} \tag{15.10}$$

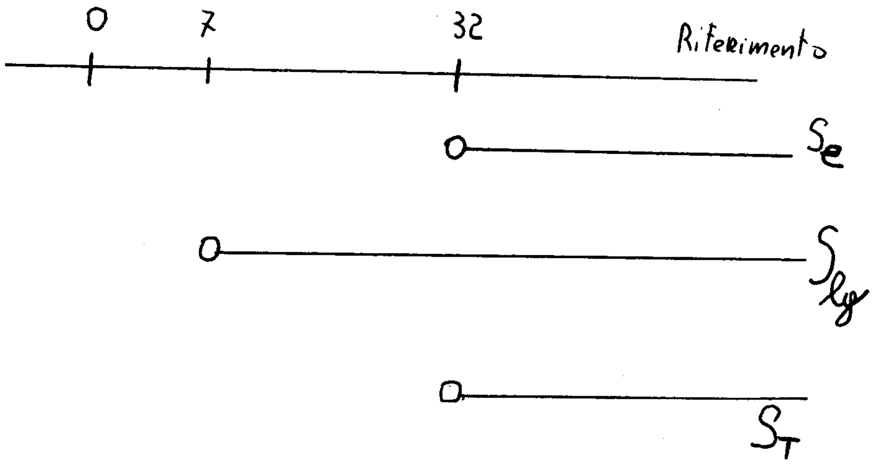


Quindi la S_{totale} é

(15.11) $$S_{totale} = S_{lg} \cap S_{esistenza}$$

come tutti i casi di intersezione , si studia il sistema

(15.12) $$\begin{cases} x > 32 \\ x > 7 \end{cases}$$



cui l'immediata soluzione

(15.13) $$S_{Totale} = x > 32$$

(15.14) $$S_{Totale} =]32\,;+\infty[$$

15.2. **Esempio N2.** Risolviamo la seguente disequazione logaritmica

$$\lg_2(x-1)-\lg_{\frac{1}{2}}(3-x)<-1 \tag{15.15}$$

utilizziamo le formule del cambiamento di base per ridurre alla stessa base i logaritmi.

$$\lg_{\frac{1}{2}}(3-x)=\frac{\lg_2(3-x)}{\lg_2\frac{1}{2}}=\frac{\lg_2(3-x)}{\lg_2 2^{-1}}= \tag{15.16}$$

$$=\frac{\lg_2(3-x)}{-1\cdot\lg_2 2}=\frac{\lg_2(3-x)}{-1}=-\ \lg_2(3-x)$$

dopo tale cambiamento di base, riscriviamo la disequazione da risolvere

$$\lg_2(x-1)+\lg_2(3-x)<-1 \tag{15.17}$$

per la proprietá del prodotto si ha:

$$\lg_2[(x-1)\cdot(3-x)]<-1 \tag{15.18}$$

la quantitá -1 la si puó scrivere come

$$-1=\lg_2 2^{-1}$$

Da cui

$$\lg_2[(x-1)\cdot(3-x)]<\lg_2 2^{-1} \tag{15.19}$$

posta in questa forma, la possiamo studiare, analizzando soltanto la disequazione degli argomenti, infatti per una proprietá dei logaritmi possiamo applicare la funzione esponenziale 2 ad ambo i membri della (15.19) e visto che la base é $2>1$ non dobbiamo invertire il senso della disequazione (15.19).

$$2^{\lg_2[(x-1)\cdot(3-x)]}<2^{\lg_2 2^{-1}} \tag{15.20}$$

e visto che esponenziale e logaritmo si annullano

$$(x-1)\cdot(3-x) < 2^{-1}$$

$$3x - x^2 - 3 + x < 2^{-1} \tag{15.21}$$

$$-x^2 + 4x - 3 < 2^{-1}$$

$$0 < x^2 - 4x + 3 + \frac{1}{2} \tag{15.22}$$

$$\frac{0}{2} < \frac{2x^2 - 8x + 6 + 1}{2} \tag{15.23}$$

$$\frac{0}{2} < \frac{2x^2 - 8x + 7}{2} \tag{15.24}$$

in definitiva dobbiamo studiare :

$$2x^2 - 8x + 7 > 0 \tag{15.25}$$

Troviamo le soluzioni dell'equazione associata alla disequazione (15.25)

$$2x^2 - 8x + 7 = 0 \tag{15.26}$$

é una equazione di secondo grado la cui forma generale é

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{15.27}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{15.28}$$

$$\Delta = (8)^2 - 4\cdot(2)\cdot(7) = 64 - 56 = 8 \tag{15.29}$$

$$\Delta = 8 \tag{15.30}$$

le soluzioni le troviamo applicando la formula generale

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a} \tag{15.31}$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2(4 \pm \sqrt{2})}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2} \tag{15.32}$$

da cui

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2} = \frac{4}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{15.33}$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2} = \frac{4}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{15.34}$$

in definitiva abbiamo ottenuto

$$x_1 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{15.35}$$

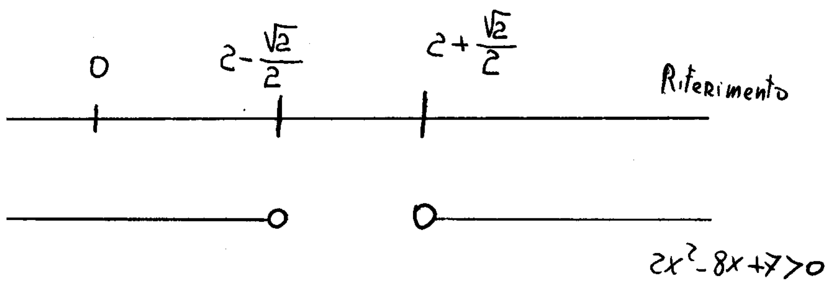
e

$$x_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{15.36}$$

Visto che la (15.25) é della famiglia delle disequazioni di secondo grado $>\ 0$ e le radici dell'equazione associata sono Reali e distinte, la (15.25) ha soluzioni positive all'esterno di tali radici.

Cioé $\;2x^2 - 8x + 7 > 0$ se

$$S_{lg} = \; x \;:\; -\infty < x < 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \;\cup\; 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} < x < +\infty \tag{15.37}$$

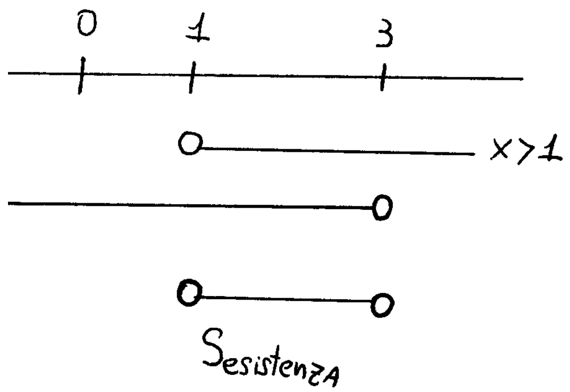


Studiamo il Campo di Esistenza dell'equazione logaritmica:

Imponiamo la condizione che gli argomenti dei logaritmi siano > 0.

(15.38)
$$\begin{cases} x-1>0 \\ 3-x>0, \end{cases}$$

(15.39)
$$\begin{cases} x>1, \\ x<3, \end{cases}$$

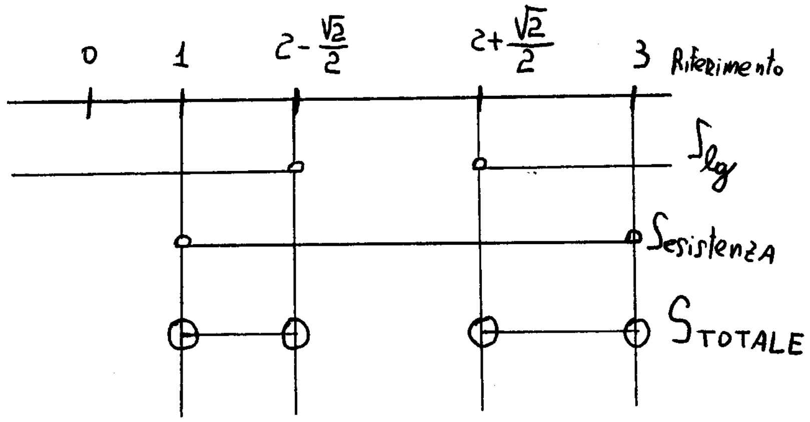


da cui la soluzione del campo di esistenza é :

(15.40) $$S_{Esistenza} =]1;3[$$

Per trovare la **soluzione totale** studiamo l'intersezione

(15.41) $$S_{Totale} = S_{logaritmica} \cap S_{Esistenza}$$



In definitiva

(15.42) $$S_{Totale} = \{x : 1 < x < 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cup 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 3\}$$

15.3. **Esempio N. 3.** Studiamo la disequazione

$$\lg_2 \frac{x+\sqrt{x^2+9}}{2x} > 1 \tag{15.43}$$

troviamo il **Campo di Esistenza** del logaritmo , imponendo che l'argomento sia strettamente maggiore di zero:

$$\frac{x+\sqrt{x^2+9}}{2x} > 0 \tag{15.44}$$

si tratta di una disequazione fratta con al numeratore una disequazione irrazionale. Studiamo $N(x) > 0$

$$x+\sqrt{x^2+9} > 0 \tag{15.45}$$

$$\sqrt{x^2+9} > -x \tag{15.46}$$

tale disequazione irrazionale é del tipo

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \tag{15.47}$$

con

$$A(x) = x^2 + 9$$

e

$$B(x) = -x$$

questa equazione irrazionale é equivalente allo studio dell'unione dei seguenti due sistemi

$$\begin{cases} B(x) < \ 0, \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases} \tag{15.48}$$

nel nostro esercizio divengono :

$$\begin{cases} -x < \ 0 \\ x^2 + 9 \geq 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2 + 9 > (-x)^2 \end{cases} \tag{15.49}$$

Analizziamo dapprima il **primo sistema**:

$$\begin{cases} x > \ 0 \\ x^2 + 9 \geq 0 \end{cases} \tag{15.50}$$

la prima é immediata

$$x > \ 0 \tag{15.51}$$

studiamo la seconda disequazione

$$x^2 + 9 \geq 0 \tag{15.52}$$

la analizziamo come se fosse

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \tag{15.53}$$

con

$$b = 0$$

calcoliamo il

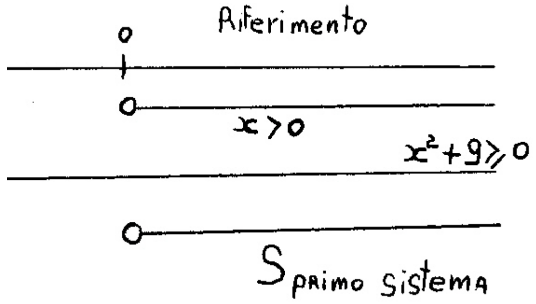
$$\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (9) = -36$$

la disequazione é della famiglia ≥ 0 con $\Delta < 0$

Quindi la soluzione é

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Facendo l'intersezione delle soluzioni delle disequazioni si ha la soluzione del **primo sistema**.



Il sistema ha soluzione

(15.54) $$S_{primo\ sistema} = x : 0\ <\ x\ +\infty$$

Analizziamo adesso il **secondo sistema**:

(15.55) $$\begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2 + 9 > (-x)^2 \end{cases}$$

(15.56) $$\begin{cases} 0 \geq x \\ 9 > 0 \end{cases}$$

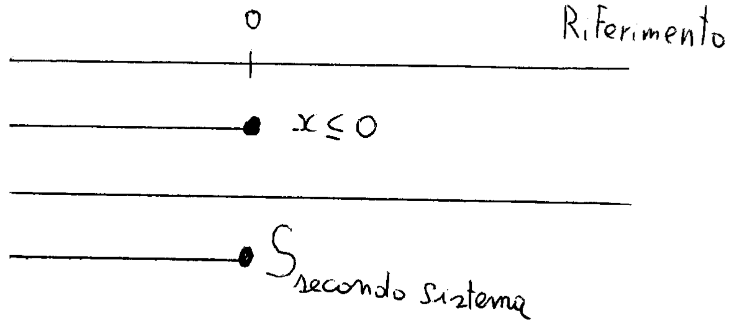
la prima disequazione é verificata

$$\forall x \leq 0$$

mentre la seconda disequazione

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

da cui l'intersezione delle due soluzioni é ovviamente



(15.57) $$S_{secondo\ sistema} = x :\ -\infty < x \leq 0$$

Facendo l'unione delle soluzioni dei due sistemi si ha

(15.58)

Soluzione Campo di Esistenza $= S_{esistenza} = S_{primo\ sistema} \cup S_{secondo\ sistema} = \mathbb{R}$

Ricerchiamo adesso la soluzione della disequazione logaritmica

(15.59) $$\lg_2 \frac{x + \sqrt{x^2+9}}{2x} > 1$$

visto che

$$1 = \lg_2 2^1$$

si ha

(15.60) $$\lg_2 \frac{x + \sqrt{x^2+9}}{2x} > \lg_2 2^1$$

applichiamo ad ambo i membri la funzione esponenziale 2^x, che avendo base > 1 non fará invertire il senso alla disequazione

(15.61) $$\frac{x + \sqrt{x^2+9}}{2x} > 2$$

(15.62) $$\frac{x + \sqrt{x^2+9} - 4x}{2x} > 0$$

$$\frac{\sqrt{x^2+9}-3x}{2x}>0 \tag{15.63}$$

la disequazione é una disequazione fratta, con al numeratore una disequazione irrazionale , per cui studiamo

$$\frac{N(x)}{D(x)}>0$$

Analizziamo

$$N(x)>0$$

$$\sqrt{x^2+9}-3x>0 \tag{15.64}$$

$$\sqrt{x^2+9}>3x \tag{15.65}$$

tale disequazione irrazionale é del tipo

$$\sqrt{A(x)}>B(x) \tag{15.66}$$

con

$$A(x)=x^2+9$$

e

$$B(x)=3x$$

la disequazione irrazionale equivalente allo studio dell'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} B(x)<0 \\ A(x)\geq 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} B(x)\geq 0 \\ A(x)>[B(x)]^2 \end{cases} \tag{15.67}$$

che nell'esercizio divengono

$$\left\{\begin{array}{l} 3x < 0 \\ x^2 + 9 \geq 0 \end{array}\right. \bigcup \left\{\begin{array}{l} 3x \geq 0 \\ x^2 + 9 > 9x^2 \end{array}\right. \tag{15.68}$$

iniziamo a studiare il **primo sistema**

$$\left\{\begin{array}{l} 3x < 0 \\ x^2 + 9 \geq 0 \end{array}\right.$$

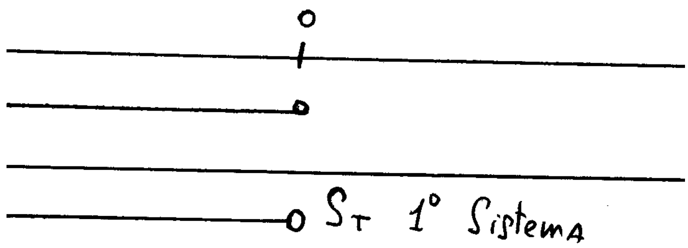
la prima disequazione ovviamente ha soluzione

$$x < 0 \tag{15.69}$$

la seconda disequazione é stata giá studiata nella ricerca del Campo di Esistenza ed ha soluzione

$$\forall x \in \mathbb{R} \tag{15.70}$$

per cui tale **primo sistema** ha soluzione



$$S_{primo\ sistema} = x : -\infty < x < 0 \tag{15.71}$$

il secondo sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x \geq 0 \\ x^2 + 9 > 9x^2 \end{array}\right.$$

(15.72)
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 > -x^2 - 9 + 9x^2 \end{cases}$$

(15.73)
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 8x^2 - 9 < 0 \end{cases}$$

studiamo la seconda disequazione

$$8x^2 - 9 < 0$$

é del tipo

$$ax^2 + bx + c < 0$$

con

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4(8)(-9) = 0 + 32 \cdot 9 = 288$$

$$\Delta = 288$$

cerchiamo le soluzioni dell'equazione associata

(15.74)
$$8x^2 - 9 = 0$$

(15.75)
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(15.76)
$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{288}}{16} = \frac{\pm\sqrt{2^5 \cdot 3^2}}{16} =$$

$$= \frac{\pm\sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 3^2}}{16} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}{16} =$$

$$= \frac{\pm 3 \cdot \sqrt{2}}{4}$$

da cui

$$x_1 = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \tag{15.77}$$

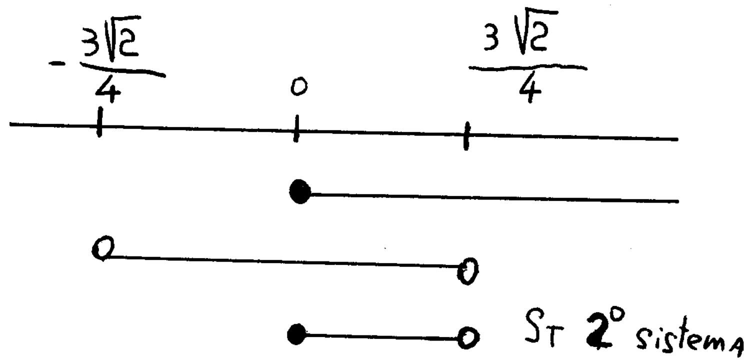
$$x_2 = -\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \tag{15.78}$$

visto che la famiglia della disequazione é < 0 e le radici dell'equazione sono reali e distinte , si ha che la disequazione é risolta per valori interni a tali soluzioni.

In sintesi la seconda disequazione é verificata per

$$S_{seconda\ disequazione\ del\ secondo\ sistema} = \ x : \ -\frac{3\sqrt{2}}{4} < x < \frac{3\sqrt{2}}{4} \tag{15.79}$$

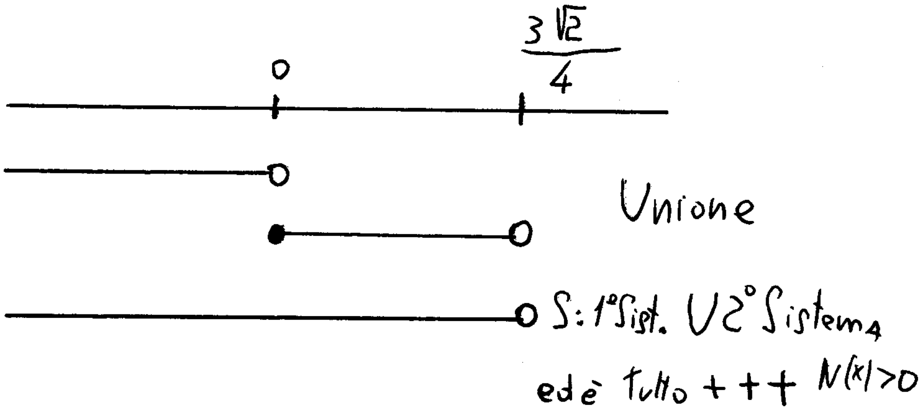
Troviamo la soluzione del secondo sistema



in definitiva la soluzione di tale secondo sistema é

$$S_{secondo\ sistema} = x : \ 0 \leq x < \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \tag{15.80}$$

Al fine di trovare la soluzione di $N(x) > 0$ dobbiamo calcolare l'unione della soluzione del primo e del secondo sistema



In sintesi

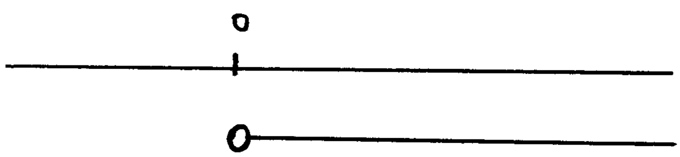
$$N(x) > 0$$

se

$$-\infty < x < \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{4}$$

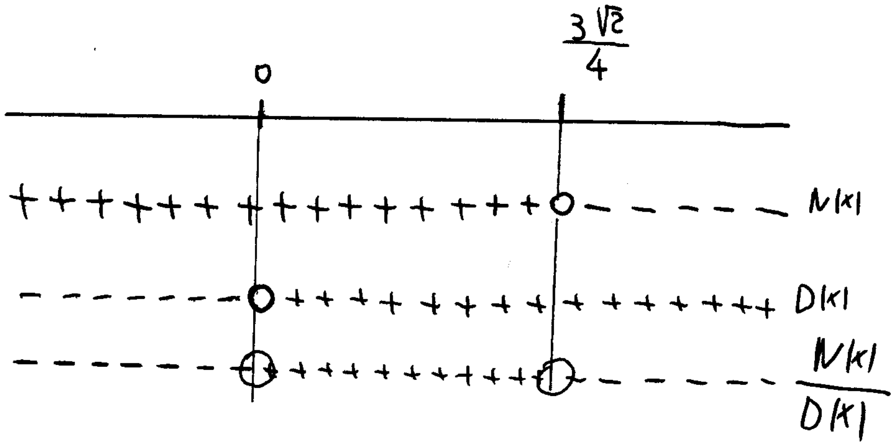
Lo studio di $D(x) > 0$ é banale

$$D(x) > 0 \; se \; x > 0$$



Passiamo adesso allo studio del segno di

$$\frac{N(x)}{D(x)}$$



Visto che cerchiamo dove

$$\frac{N(x)}{D(x)} > 0$$

la soluzione della disequazione logaritmica é

$$S_{disequazione\ logaritmica} = \{x : 0 < x < \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4}\} \tag{15.81}$$

Quindi la Soluzione Totale dell'esercizio é

$$S_{Totale} = S_{Disequazione\ Logaritmica} \cap S_{Campo\ di\ Esistenza}$$

$$S_{Totale} =]0;\ \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4}[\cap \mathbb{R} =]0;\ \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4}[\tag{15.82}$$

in definitiva

$$S_{Totale} =]0;\ \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4}[\tag{15.83}$$

Disequazioni Logaritmiche Esercizi

Chiameremo $S_{C.E.}$ la soluzione del C.E. della disequazione logaritmica, dove bisogna porre gli argomenti dei logaritmi strettamente maggiori di 0 (>0)

$$\lg_a A(x) + \lg_a B(x) + \lg_b C(x) > 3$$

$$S_{C.E.} = \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases}$$

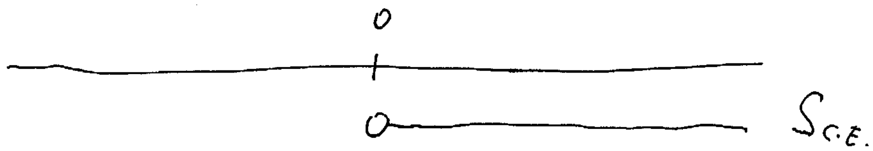
Chiameremo S_{lg} la soluzione della disequazione logaritmica.

La Soluzione Totale $S_t = S_{C.E.} \cap S_{lg}$

Esercizio N 1

$$\log_{\frac{1}{2}} x < 4$$

C.E. : $x > 0$ $\quad S_{C.E.} = x > 0$



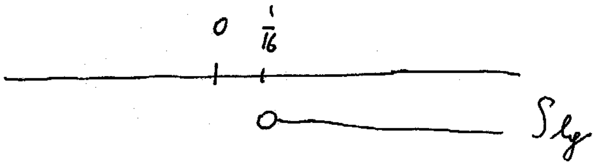
Ricerchiamo S_{lg}

Applichiamo la proprietà $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$

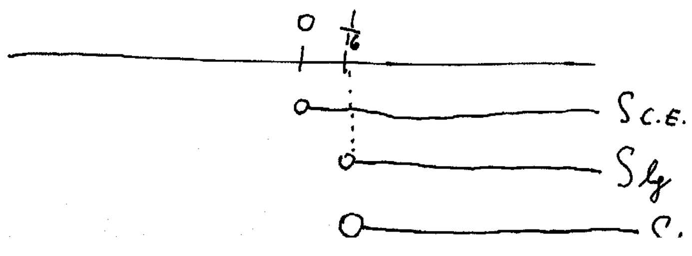
$-\log_2 x < 4$; $\log_2 x > -4$ applichiamo la funzione esponenziale di base 2.

$$\cancel{2^{\log_2 x}} > 2^{-4} \; ; \; x > 2^{-4} \; ; \; x > \frac{1}{2^4} \; ; \; x > \frac{1}{16}$$

$S_{lg} : x > \frac{1}{16}$



$S_t = S_{C.E.} \cap S_{lg} =$



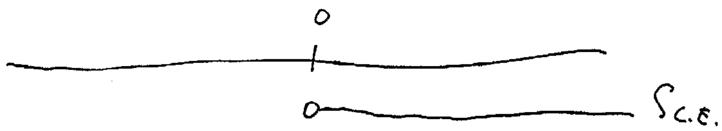
$S_t : \left]\frac{1}{16} ; +\infty\right[$

Esercizio N2

p3

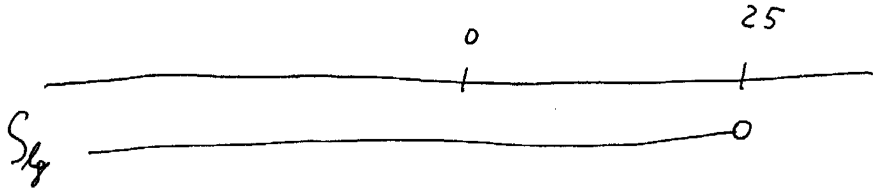
$\log_{\sqrt[3]{5}} x < 6$

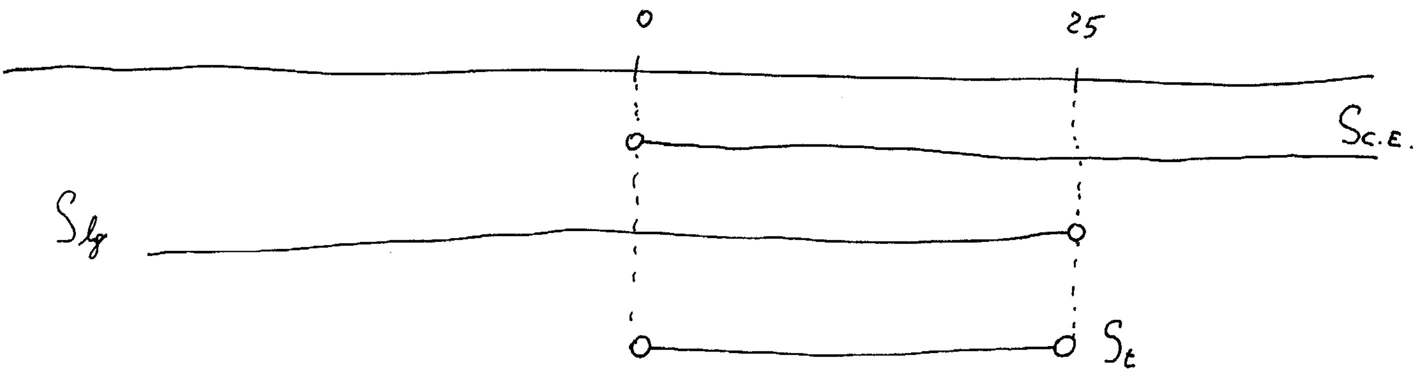
$\log_{5^{\frac{1}{3}}} x < 6$. $\quad S_{c.e.} = x > 0$



$5^{\frac{1}{3}\left(\log_{5^{\frac{1}{3}}} x\right)} < 5^{\frac{1}{3}(6)}$; $x < 5^{\frac{1}{3} \cdot 6}$; $x < 5^{\frac{6}{3}}$

$x < 5^2$; $\quad x < 25 : S_{lg}$



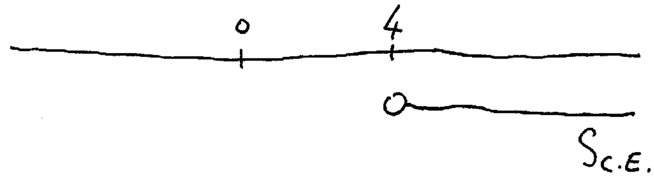


$S_t =]0;25[$

Esercizio N3

$\log_{\frac{1}{10}}(x-4) > 1$

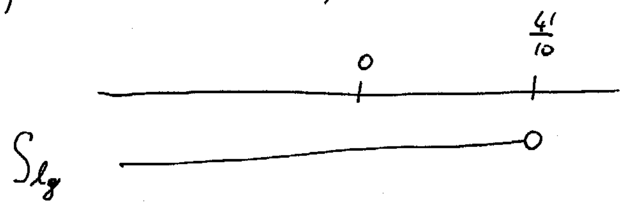
C.E. : $x-4>0$, $x>4$: $S_{C.E.}$

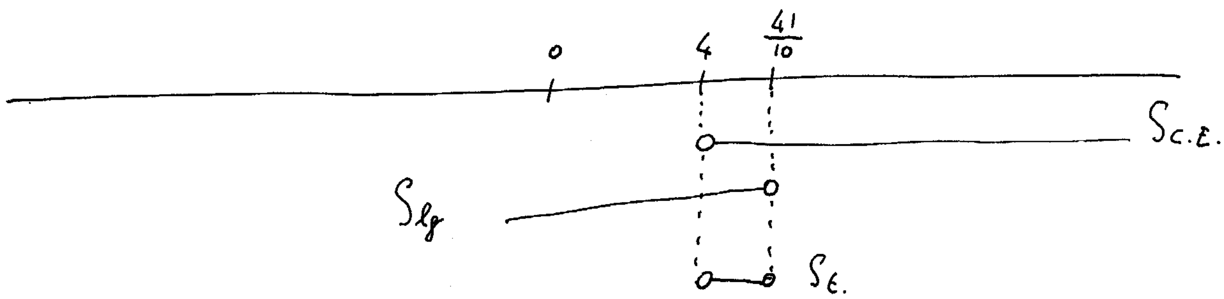


$\log_{\frac{1}{10}}(x-4)>1$; $-\log_{10}(x-4)>1$; $\log_{10}(x-4)<-1$

$10^{\log_{10}(x-4)} < 10^{-1}$; $x-4<10^{-1}$; $x-4<\frac{1}{10}$;

$x<4+\frac{1}{10}$; $x<\frac{40+1}{10}$; $x<\frac{41}{10}$. $S_{lg} : x<\frac{41}{10}$



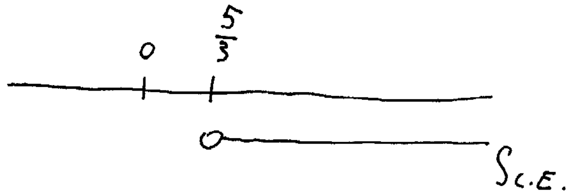


$S_t =]4 ; \frac{41}{10}[$

Esercizio N 4

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x-5)>2$$

c.e. : $3x-5>0$, $3x>5$; $x>\frac{5}{3}$



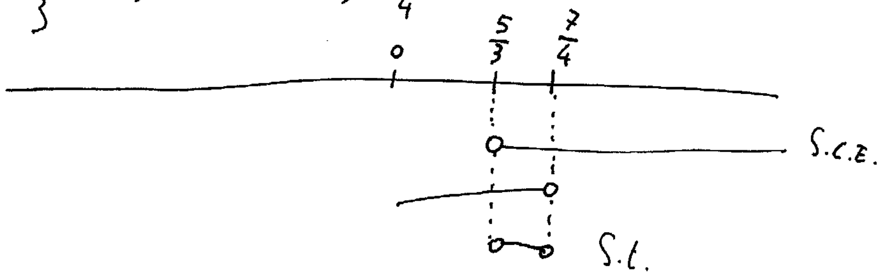
Applichiamo la funzione esponenziale di base $\frac{1}{2}$ ad ambo i membri, ricordando che essendo $\frac{1}{2}<1$, dobbiamo invertire il senso alla disequazione

$$\frac{1}{2}^{\log_{\frac{1}{2}}(3x-5)} < \left(\frac{1}{2}\right)^2 ; \quad 3x-5 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 ; \quad 3x-5<(2^{-1})^2 ;$$

$$3x-5<2^{-2} ; \quad 3x<5+2^{-2} ; \quad 3x<5+\frac{1}{2^2} ;$$

$$3x<5+\frac{1}{4} ; \quad 3x<\frac{20+1}{4} ; \quad 3x<\frac{21}{4} ; \quad x<\frac{\frac{21}{4}}{3}$$

$$x<\frac{21}{4}\cdot\frac{1}{3} ; \quad x<\frac{\cancel{21}^{\,7}}{\cancel{12}_{\,4}} ; \quad x<\frac{7}{4} \ : S_{lg}$$



$$S_t = \left]\frac{5}{3};\frac{7}{4}\right[$$

Esercizio N5

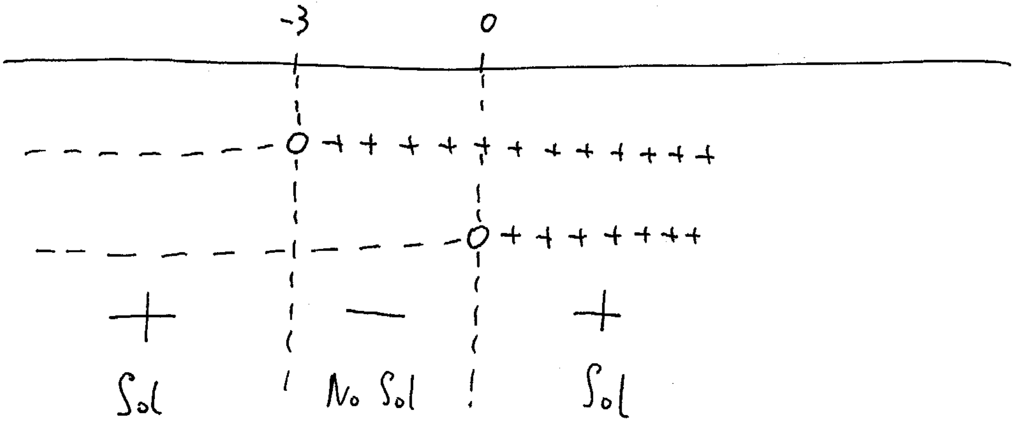
(P6)

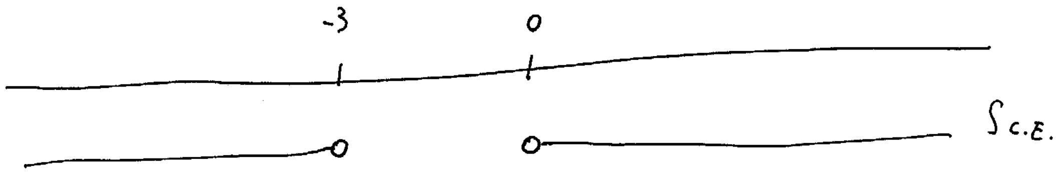
$$\log_2 \frac{x+3}{x} > 1$$

C.E. $\frac{x+3}{x} > 0$ studiamo la disequazione razionale fratta

$N(x) > 0$: $x+3 > 0$, $x > -3$

$D(x) > 0$: $x > 0$





Applichiamo la funzione esponenziale di base 2

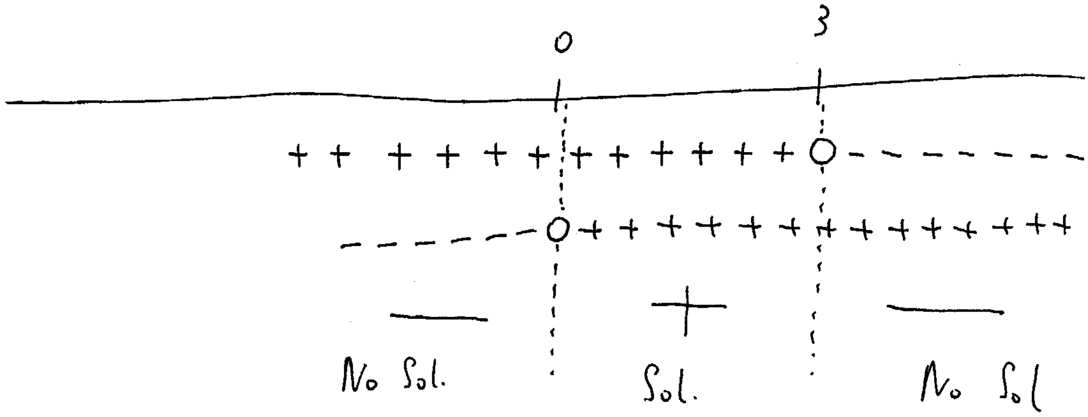
$$2^{\log_2 \frac{x+3}{x}} > 2^1 \;;\; \frac{x+3}{x} > 2 \;;\; \frac{x+3}{x} - 2 > 0$$

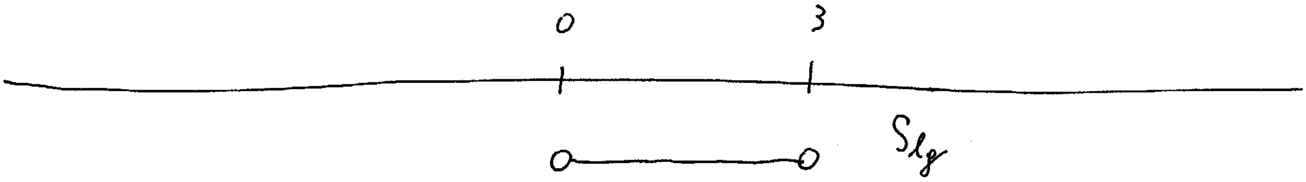
$$\frac{x+3-2x}{x} > 0 \;;\; \frac{-x+3}{x} > 0$$

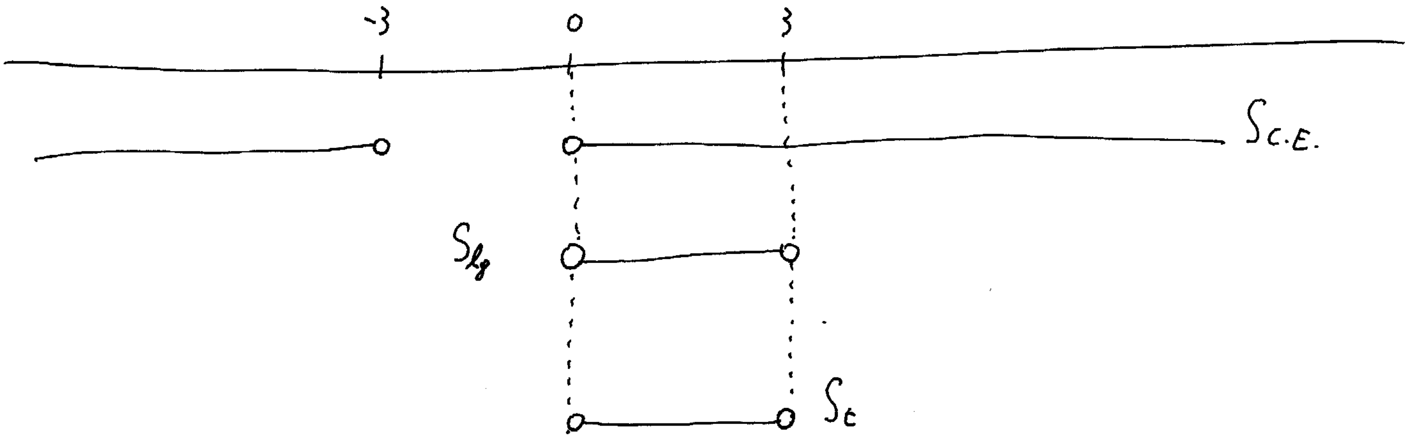
$N(x) > 0$

$-x+3 > 0$; $3 > x$; $x < 3$ per x minore di 3 $N(x) > 0$

$D(x) > 0$ $x > 0$







$S_t =]0;3[$

Esercizio N 6

P8

$$\lg_2\left(x^2-\frac{3}{4}\right)<-2$$

c.E.: $x^2-\frac{3}{4}>0$; $\frac{4x^2-3}{4}>0$; $4x^2-3>0$

$\Delta=b^2-4ac=0-4(4)(-3)=+48$

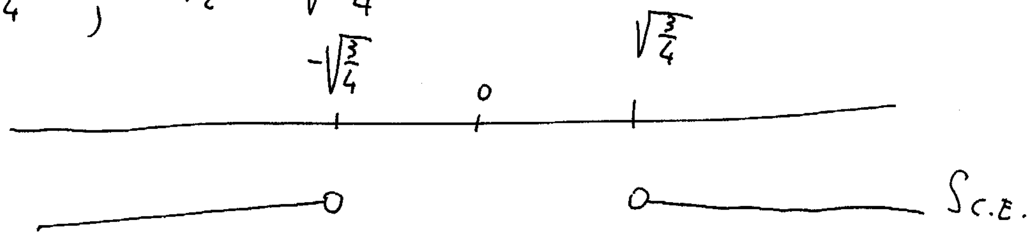
La famiglia della disequazione è >0 e il Δ è >0 $\Rightarrow$

soluzioni positive all'esterno delle radici.

Determiniamo le radici dell'equazione associata

$4x^2-3=0$; $4x^2=3$; $x^2=\frac{3}{4}$; $x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$

$x_1=+\sqrt{\frac{3}{4}}$; $x_2=-\sqrt{\frac{3}{4}}$



$2^{\lg_2\left(x^2-\frac{3}{4}\right)}<2^{-2}$; $x^2-\frac{3}{4}<\frac{1}{2^2}$; $x^2-\frac{3}{4}<\frac{1}{4}$

$x^2<\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$; $x^2<\frac{3+1}{4}$; $x^2<\frac{4}{4}$; $x^2<1$

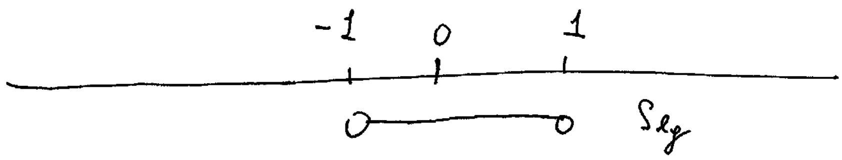
$x^2-1<0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4(1)(-1) = 4$

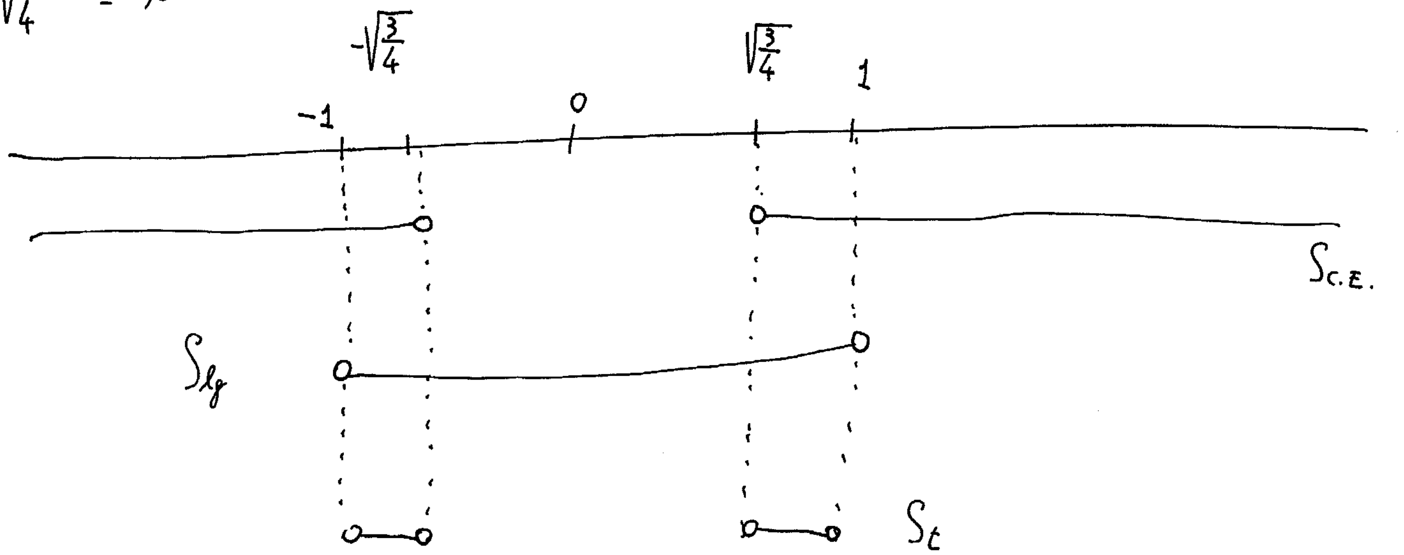
la famiglia è del tipo < 0, il Δ è $> 0 \Rightarrow$
le soluzioni della disequazione sono interne

Risolviamo l'equazione associata

$x^2 - 1 = 0$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$



$\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}866$



$S_t = \left]-1; -\sqrt{\frac{3}{4}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{3}{4}}; 1\right[$ cioè

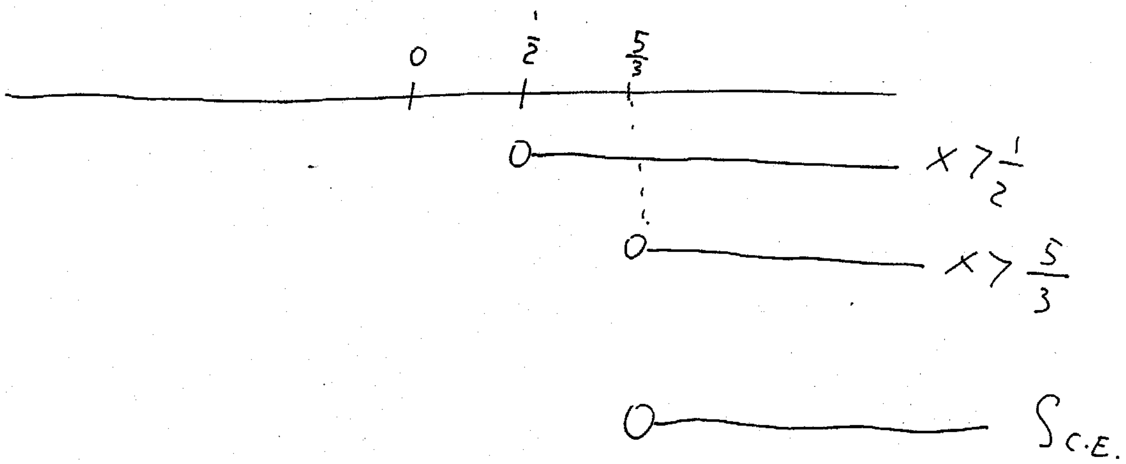
$S_t = \left]-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right[$

Esercizio N7

P10

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x-5) < \log_{\frac{1}{4}}(2x-1)$$

$$C.E. = \begin{cases} 3x-5>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x>5 \\ 2x>1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>\frac{5}{3} \\ x>\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$S_{C.E.} = \left]\frac{5}{3}; +\infty\right[.$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x-5) < \log_{\frac{1}{4}}(2x-1)$$

P 11

$$-\log_2(3x-5) < -\log_4(2x-1);$$

$$\log_4(2x-1) < \log_2(3x-5)$$

Applichiamo le formula del cambiamento di base $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$$\cancel{\log_4(2x-1) < \frac{\log}{\quad}}$$

$$\frac{\log_2(2x-1)}{\log_2 4} < \log_2(3x-5)$$

$$\frac{\log_2(2x-1)}{\log_2 2^2} < \log_2(3x-5) \quad ;$$

(P12)

$$\frac{\log_2(2x-1)}{2\log_2 2} < \log_2(3x-5); \quad \frac{\log_2(2x-1)}{2} < \log_2(3x-5);$$

$$\log_2(2x-1) < 2\cdot\log_2(3x-5); \quad \log_2(2x-1) < \log_2(3x-5)^2$$

Applichiamo la funzione esponenziale di base 2

$$2^{\log_2(2x-1)} < 2^{\log_2(3x-5)^2}; \quad 2x-1 < (3x-5)^2;$$

$$2x-1-(3x-5)^2 < 0; \quad 2x-1-(9x^2+25-30x) < 0$$

$$2x-1-9x^2-25+30x < 0; \quad -9x^2+32x-26 < 0 \quad (*)$$

moltiplichiamo (*) per (-1)

$$(\square) \quad 9x^2-32x+26 > 0 \qquad \Delta = b^2-4ac = (32)^2-4(9)(26) =$$

$$= 1024 - 936 = 88$$

$$\Delta = 88$$

(0) è della famiglia > 0 e Δ è > 0 ⇒ (PB)

soluzioni positive all'esterno.

Calcoliamo le soluzioni dell'equazione associata

$9x^2 - 32x + 26 = 0$

$x = \frac{32 \pm \sqrt{88}}{18} =$

$\begin{array}{c|c} 88 & 2 \\ 44 & 2 \\ 22 & 2 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$ $88 = 2^3 \cdot 11$

$= \frac{32 \pm \sqrt{2^3 \cdot 11}}{18} = \frac{32 \pm \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 11}}{18} = \frac{32 \pm 2\sqrt{22}}{18} =$

$= \frac{\cancel{2}^{1}(16 \pm \sqrt{22})}{\cancel{18}_{9}} = \frac{16 \pm \sqrt{22}}{9}$

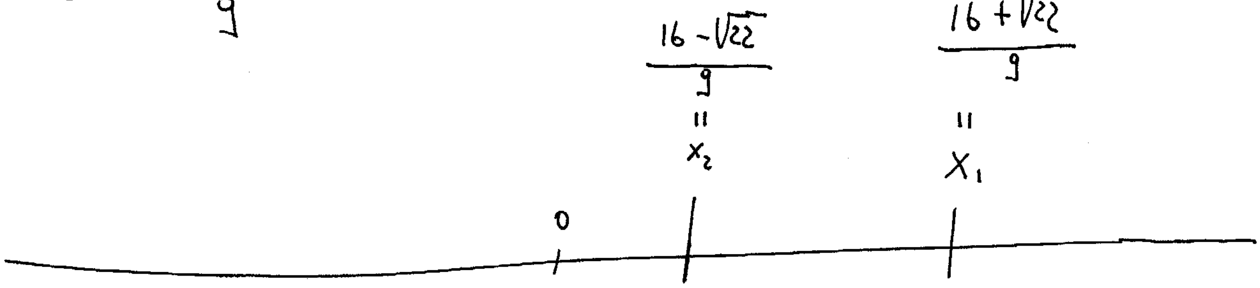
$x_1 = \frac{16 + \sqrt{22}}{9}$

$x_2 = \frac{16 - \sqrt{22}}{9}$

$$x_1 = \frac{16+4,7}{9} = 2,3$$

P 14

$$x_2 = \frac{16-4,7}{9} = 1,26$$

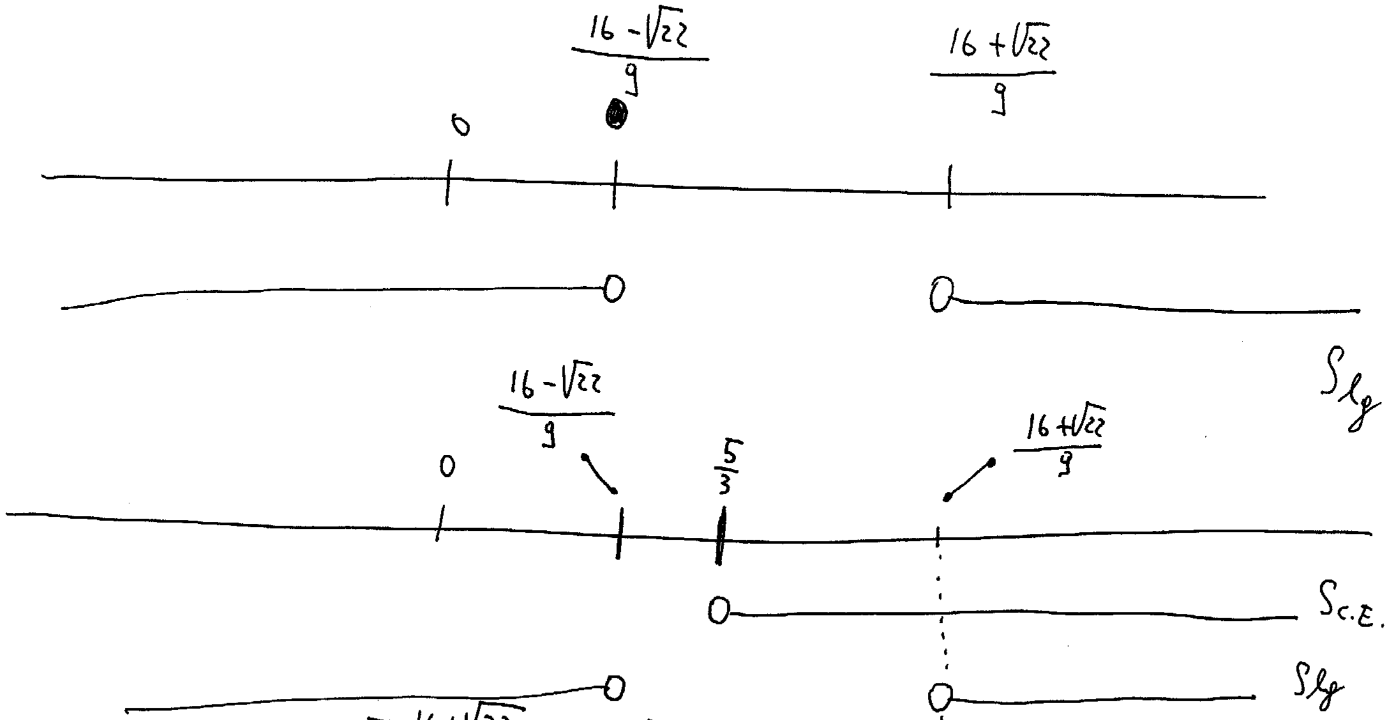


$+ + + + + + + + + 0 - - - - - - - 0 + + + + +$ $(\square)$

Da cui (*) ha soluzioni

$- - - - - - - 0 + + + + + 0 - - - - - -$ $(*)$

(*) cerca le soluzioni negative $\Rightarrow$

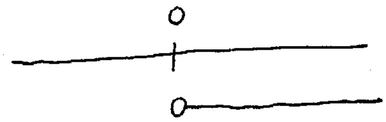


$S_t = \left]\frac{16+\sqrt{22}}{9} ; +\infty\right[$

Esercizio N° 8 (P 15)

$$3\log_2 x - \frac{12}{\log_2 x} < 5$$

C.E. $x > 0$



$S_{C.E.}$

$\log_2 x = t$

$$3t - \frac{12}{t} < 5 \; ; \quad \frac{3t^2-12}{t} < \frac{5t}{t} \; ; \quad \frac{3t^2-12}{t} - \frac{5t}{t} < 0 \; ;$$

$$\frac{3t^2-12-5t}{t} < 0 \; ; \quad \frac{3t^2-5t-12}{t} < 0$$

$N(t) > 0$

$3t^2 - 5t - 12 > 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4(3)(-12) = 25 + 144 = 169$

$\Delta = 169$

famiglia > 0 , $\Delta > 0 \Rightarrow$ soluzioni positive all'esterno

troviamo le soluzioni dell'equazione associata

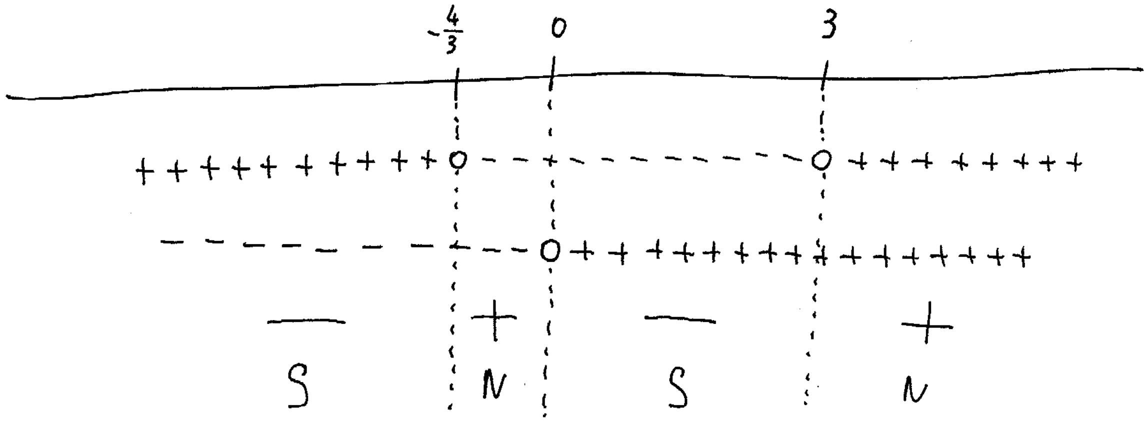
$$3t^2 - 5t - 12 = 0 \; ; \quad t = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{5 \pm 13}{6} = \begin{cases} \frac{5+13}{6} = 3 \\ \frac{5-13}{6} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

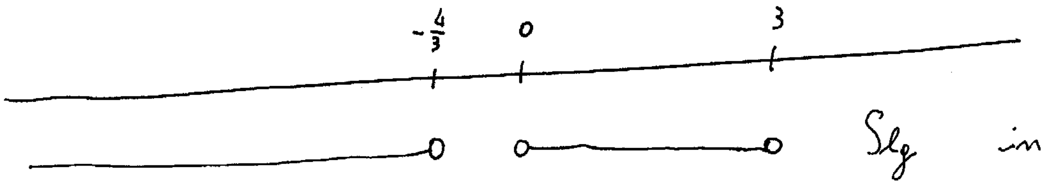
$t_1 = 3$

$t_2 = -\frac{4}{3}$

soluzioni positive all'esterno e negative all'interno

$D(t) > 0$ $\qquad t > 0$ $\qquad$ P16





Slz in parametro t

determiniamo le soluzioni nella variabile x

sapendo che $\log_2 x = t$

Analizziamo i vari estremi degli intervalli

$-\infty, -\frac{4}{3}, 0, 3$

$\log_2 x = -\infty \Rightarrow x = 0$

$\log_2 x = -\frac{4}{3}$; $2^{\log_2 x} = 2^{-\frac{4}{3}}$; $x = 2^{-\frac{4}{3}}$; $x = \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}$;

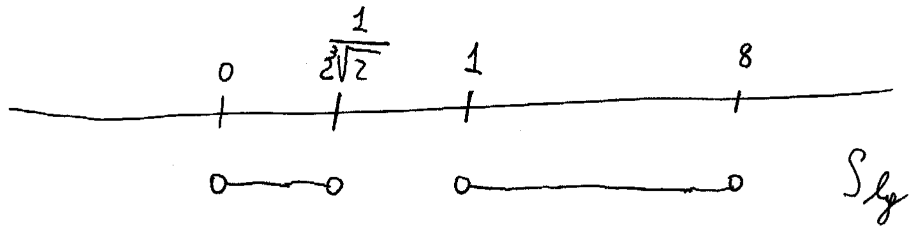
$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}}$; $x = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

$\log_2 x = 0$; $2^{\log_2 x} = 2^0$; $x = 2^0$; $x = 1$.

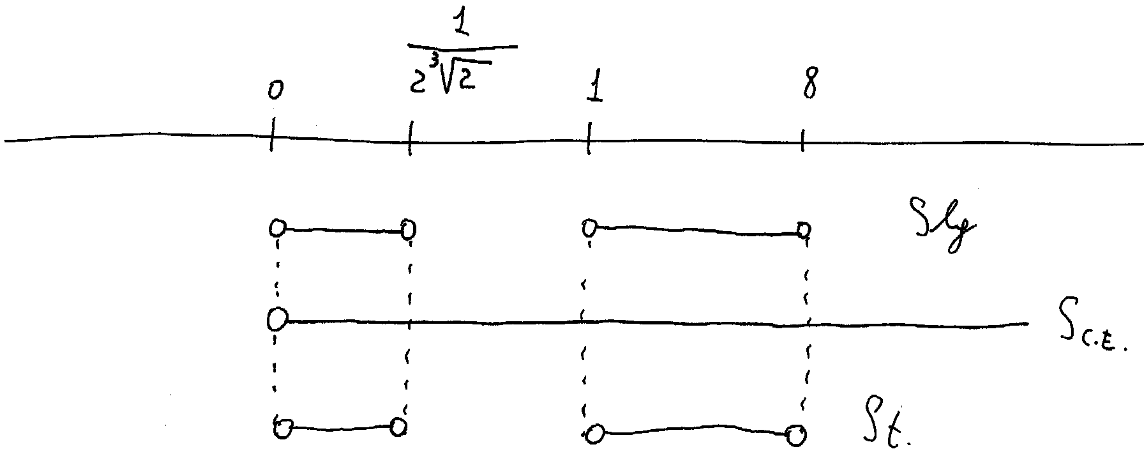
P17

$\log_2 x = 3$; $2^{\log_2 x} = 2^3$; $x = 8$.

Ricomponiamo gli intervalli



Ricerchiamo la soluzione totale



$$S_t =]0; \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}[\cup]1; 8[$$

Prof. Francesco Zumbo

www.francescozumbo.it

Esercizi svolti sulle equazioni esponenziali

Equazione esponenziale

$$5 \cdot 3^{x-1} - 3 \cdot \frac{5^{2x-1}}{5^{x}} = 0$$

$$5 \cdot 3^{x-1} - 3 \cdot 5^{2x-1} \cdot 5^{-x} = 0, \; 5 \cdot 3^{x-1} - 3 \cdot 5^{2x-1-x} = 0$$

$$5 \cdot 3^{x-1} - 3 \cdot 5^{x-1} = 0, \; 5 \cdot 3^{x-1} = 3 \cdot 5^{x-1},$$

applichiamo $\log_3$ ad ambo i membri.

$$\log_3 (5 \cdot 3^{x-1}) = \log_3 (3 \cdot 5^{x-1}),$$

$$\log_3 5 + \log_3 3^{x-1} = \cancel{\log_3 3}^{1} + \log_3 5^{x-1},$$

$$\log_3 3^{x-1} - \log_3 5^{x-1} = 1 - \log_3 5$$

$$(x-1) \cancel{\log_3 3} - (x-1) \log_3 5 = 1 - \log_3 5$$

$$x - 1 - x \log_3 5 + \log_3 5 = 1 - \log_3 5$$

$$x(1 - \log_3 5) = 1 - \log_3 5 + 1 - \log_3 5;$$

$$x(1 - \log_3 5) = 2 - 2\log_3 5; \; x(1 - \log_3 5) = 2(1 - \log_3 5);$$

$$x = \frac{2\cancel{(1 - \log_3 5)}}{\cancel{(1 - \log_3 5)}}; \quad x = 2$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right]^{2} = \frac{8}{27}$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right]^{2} = \frac{2^3}{3^3} \; ; \; \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right]^{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3} \; ; \; \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$

$$\cancel{\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)}^{2x} = \cancel{\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)}^{3} \; ; \; 2x = 3 \; ; \; x = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} \; ; \; \cancel{\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)}^{x+1} = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} \; ;$$

$$x+1 = 2x \cdot \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} \; ; \; x+1 = 2x \cdot \left(-\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2}\right) \; ;$$

$$x+1 = 2x \cdot (-1) \; ; \; x+1 = -2x \; ; \; x+2x = -1 \; ; \; 3x = -1 \; ;$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{3^{1-x}\cdot 9^{2+x}}{27^{x}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3\cdot 3^{-x}\cdot \left(3^{2}\right)^{2+x}}{\left(3^{3}\right)^{x}} = 3^{-1}; \quad \frac{3\cdot 3^{-x}\cdot 3^{4+2x}}{3^{3x}} = 3^{-1};$$

$$3^{1-x+4+2x}\cdot 3^{3x} = 3^{-1}; \quad 3^{5+x}\cdot 3^{3x} = 3^{-1};$$

$$3^{5+x-3x} = 3^{-1}; \quad 3^{5-2x} = 3^{-1};$$

$$\cancel{\log_3} 3^{5-2x} = \cancel{\log_3} 3^{-1}; \quad 5-2x=-1; \quad -2x=-5-1;$$

$$-2x=-6; \quad x=3$$

$$\frac{\sqrt[3]{32^{x}}}{\left(2^{x+2}\right)^{x-2}} = 1$$

$$\frac{\sqrt[3]{\left(2^{5}\right)^{x}}}{2^{(x+2)(x-2)}} = 1 \; ; \; \sqrt[3]{2^{5x}} = 2^{(x+2)(x-2)}$$

$$\left(2^{5x}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{(x+2)(x-2)} \; ; \; 2^{\frac{5}{3}x} = 2^{(x+2)(x-2)}$$

$$\log_2 2^{\frac{5}{3}x} = \log_2 2^{(x+2)(x-2)} \; ; \; \frac{5}{3}x = (x+2)(x-2) \; ;$$

$$x^2 - 4 = \frac{5}{3}x \; ; \; x^2 - \frac{5}{3}x - 4 = 0 \; ; \; \frac{3x^2 - 5x - 12}{3} = \frac{0}{3} \; ;$$

$$3x^2 - 5x - 12 = 0 \; ; \; x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(3)(-12)}}{6} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{6} = \frac{5 \pm 13}{6} = \begin{cases} \dfrac{5+13}{6} = \dfrac{18}{6} = 3 \\[2ex] \dfrac{5-13}{6} = \dfrac{\cancel{-8}^{\,4}}{\cancel{6}_{\,3}} = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$x_1 = 3 \; ; \; x_2 = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{32-3^{x}}{5+3^{-x}}=\frac{9}{2}$$

$$2\left(32-3^{x}\right)=9\left(5+3^{-x}\right);\quad 2\left(2^{5}-3^{x}\right)=9\left(5+\frac{1}{3^{x}}\right)$$

poniamo $3^{x}=t$

$$2\left(2^{5}-t\right)=9\left(5+\frac{1}{t}\right);\quad 2^{6}-2t=9\left(\frac{5t+1}{t}\right);$$

$$2^{6}-2t=\frac{45t+9}{t};\quad t\left(2^{6}-2t\right)=45t+9;$$

$$2^{6}t-2t^{2}-45t-9=0;\quad -2t^{2}+t\left(2^{6}-45\right)-9=0$$

$$-2t^{2}+t\left(64-45\right)-9=0;\quad -2t^{2}+19t-9=0;$$

$$2t^{2}-19t+9=0;\quad t=\frac{19\pm\sqrt{19^{2}-4(2)(9)}}{4}=\frac{19\pm\sqrt{361-72}}{4}=$$

$$=\frac{19\pm17}{4}=\begin{cases}\frac{36}{4}=9\\[4pt]\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$t_1=9$ $\quad$ $t_2=\frac{1}{2}$

1) $3^{x}=t_1;\quad 3^{x}=9;\quad 3^{x}=3^{2};\quad x=2$

2) $3^{x}=t_2;\quad 3^{x}=\frac{1}{2};\quad \log_3 3^{x}=\log_3 3^{\frac{1}{2}};\quad x\log_3 3=\frac{1}{2}\log_3 3;$

$x=\frac{1}{2}$