Liceo Scientifico Statale "Leonardo da Vinci" di Reggio Calabria

http://www.liceovinci.rc.it

Anno Scolastico 2009-2010

Classe 4G P.N.I.

Progetto POF

Matematica , Fisica e Multimedialità nelle 4^ classi

Studentessa: **Galletta Mariella**

Titolo: **Logaritmi ed Esponenziali**

LOGARITMI ED ESPONENZIALI

La funzione esponenziale

Se a è un numero positivo diverso da 1 ed x una variabile reale, l'espressione a^x varia al variare di x; posto $y = a^x$ si ottiene una funzione che viene detta funzione esponenziale. Per individuare le principali proprietà della funzione esponenziale ci limitiamo a rappresentare graficamente due funzioni esponenziali, una $a > 1$ e l'altra con $0 < a < 1$

Grafico della funzione $y = 2^x$

x	$y = 2^x$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$

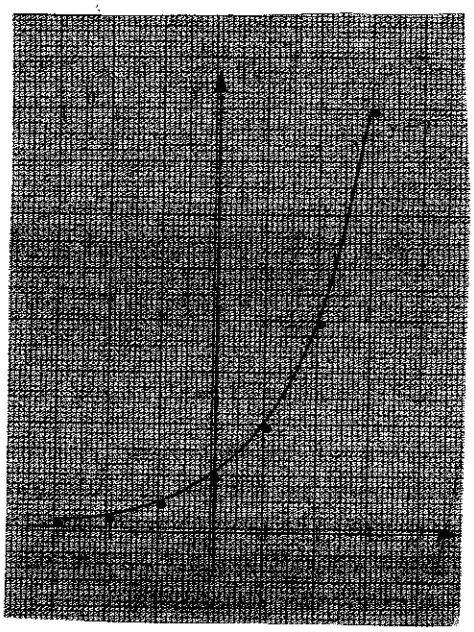
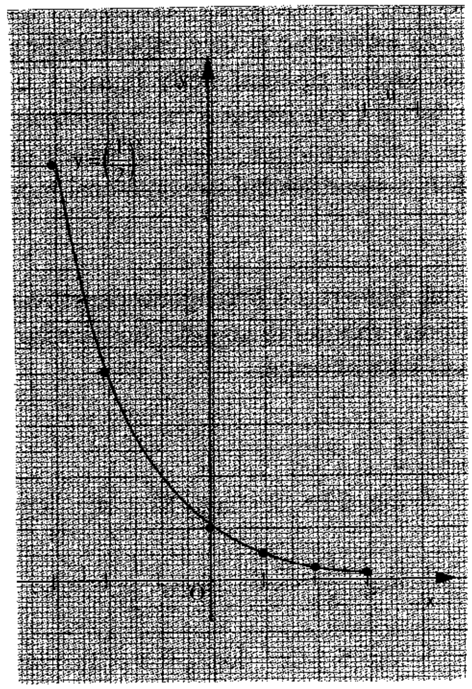


Grafico della funzione $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2^3=8$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^2=4$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}=0{,}5$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}=0{,}25$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8}=0{,}125$



Come si può osservare la funzione esponenziale $y=a^x$ assume valori positivi per qualunque valore attribuito all'esponente. Per $a>1$ la funzione è crescente e tende a $+\infty$ per x tendente a $+\infty$, mentre tende a zero per x tendente a $-\infty$. Viceversa, per $0<a<1$ la funzione è decrescente e tende a 0 per x tendente a $+\infty$ mentre tende a $+\infty$ per x tendente a $-\infty$

La funzione esponenziale assume dunque un ruolo fondamentale nello studio di processi fisici, tecnici, statistici, economici e biologici.

Le equazioni esponenziali

Chiamiamo equazione esponenziale ogni equazione nella quale l'incognita compare nell'esponente di qualche potenza.

Per esempio:

l'equazione $2 \cdot 5^x - 1 = 0$ è esponenziale, mentre:

$2x \cdot 5^2 - 1 = 0$ non è un'equazione esponenziale, perché x non compare come esponente.

- L'equazione esponenziale è impossibile quando:

a^x è negativo o nullo.

Per esempio l'equazione $2^x = -4$ non è verificata per alcun valore reale di x. Non hanno soluzioni nemmeno equazioni del tipo $1^x = 4$ perché $1^x = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Pertanto i casi in cui l'equazione $a^x = b \ (a > 0)$ risulta impossibile sono i seguenti:

1. se $b \leq 0$
2. se $a = 1$ e $b \neq 1$

- L'equazione esponenziale è indeterminata

se $a = 1$ e $b = 1$, l'equazione ha infinite soluzioni, cioè l'equazione

$1^x = 1$

è indeterminata, perché è verificata per qualunque valore reale di x.

- L'equazione esponenziale è ~~in~~determinata

Se abbiamo $a^x = b$, con a e b reali positivi e $a \neq 1$, ammette sempre una e una sola soluzione.

È possibile risolvere l'equazione in modo immediato, se si riescono a scrivere a e b come potenze aventi la stessa base

Per esempio:

$25^x = 125$

Poiché 25 e 125 si possono scrivere come potenze di 5, scriviamo l'equazione come:

$5^{2x} = 5^3$

se due potenze sono uguali e sono uguali le basi, devono essere uguali anche gli esponenti, quindi:

$5^{2x} = 5^3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$.

Nonostante tutto non c'é una regola ben precisa per risolvere le equazioni esponenziali, e quindi é meglio illustrare qualche particolare esempio di equazioni esponenziali.

1 $\frac{3^{2x+1} \cdot 81}{3^{1-x}} = \sqrt{3}$

prima applichiamo le proprietá delle potenze e si perviene all'uguaglianza tra due potenze e poi si uguagliano gli esponenti:

$3^{2x+1} \cdot 3^4 : 3^{1-x} = 3^{\frac{1}{2}}$,

$3^{2x+1+4-1+x} = 3^{\frac{1}{2}}$

$3^{3x+4} = 3^{\frac{1}{2}}$

$3x+4 = \frac{1}{2}$ e quindi $x = -\frac{7}{6}$

2 $5^x + 5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x+2} = 2025$

Prima la scriviamo nella forma equivalente, poi si mette in evidenza 5^x:

$5^x + 5 \cdot 5^x + 3 \cdot 25 \cdot 5^x = 2025$

$5^x(1+5+75) = 2025$ e quindi

$5^x = \frac{2025}{81}$;

$5^x = 25$

$x = 2$

3 $3^{x+1}-2\cdot 3^x+3^{x+2}=2^{x-1}$

$3\cdot 3^x-2\cdot 3^x+9\cdot 3^x=\frac{2^x}{2}$

$3^x(3-2+9)=\frac{2^x}{2}$

$10\cdot 3^x=\frac{2^x}{2}$

$\log(10\cdot 3^x)=\log\frac{2^x}{2}$

$\log 10+x\log 3=x\log 2-\log 2$

$x(\log 3-\log 2)=-1-\log 2$

$x=\frac{1+\log 2}{\log 2-\log 3}$

La scriviamo in forma equivalente, poi uguagliando i logaritmi decimali dei due membri dell'uguaglianza ed applicando le proprietà dei logaritmi si ottiene:

4 $5^x(5^{x+1}+9)=2$

$5\cdot 5^{2x}+9\cdot 5^x-2=0$

$5^x=-2$ e

$5^x=\frac{1}{5}$

Svolgendo le adeguate operazioni vediamo che l'equazione risulta di 2° grado nell'incognita 5^x. La prima uguaglianza è impossibile mentre dalla seconda si ricava $x=-1$

Le disequazioni esponenziali

Una disequazione si dice esponenziale quando contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

Nelle disequazioni esponenziali valgono sempre osservazioni del tipo

- se $a>1$ $\quad t>z \to a^t>a^z$
- se $0<a<1$ $\quad t>z \to a^t<a^z$

Per risolvere una disequazione esponenziale, bisogna cercare di ricondurla a una forma ridotta del tipo $a^x < b$ oppure $a^x > b$.
In seguito si cerca di riportare b in dipendenza da a, portandosi a una forma del tipo $a^x < a^c$. A questo punto la disequazione è risolta per $x < c$ se $a > 1$ e per $x > c$ se $0 < a < 1$

$\boxed{\text{Esempio:}}$

1 $32^x > 128$

$2^{5x} > 2^7$

$2^{5x} > 2^7$

$5x > 7$

$x > \frac{7}{5}$

provengono entrambi da 2 e quindi li scriviamo come potenze, poiché esse hanno la base maggiore di 1, dalla disuguaglianza precedente otteniamo una disuguaglianza fra gli esponenti di uguale verso:

2 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-5} > \left(\frac{1}{3}\right)$

$2x - 5 < 1$

$-3 < x < 3$

Essendo uguali e minori di 1 le due basi sono verificate per i seguenti valori:

3 $\frac{3^x \cdot 4}{2^{x-1}} < 1$

$\frac{3^x \cdot 2^2}{2^{x-1}} < 1$

$3^x \cdot 2^2 < 2^{x-1}$

$3^x < 2^{-2+x-1}$

$3^x < 2^{x-3}$

$\log_2 3^x < \log_2 2^{(x-3)}$

Prima viene portato a forma lineare, facendo gli opportuni calcoli, poi si applica la proprietà del logaritmo, che tende a semplificare lo svolgimento.

$\log_2 3^x < x-3$

$x \log_2 3 < x-3$

$x \log_2 3 - x < -3$

$x(\log_2 3 - 1) < -3$

$x < \frac{-3}{\log_2 3 - 1}$

$x < \frac{-3}{\log_2 3 - \log_2 2}$

$x < \frac{\log_2 2^{3}}{\log_2 2^{3} - \log_2 2^{2}}$

$x < \frac{\log 8}{\log 3 - \log 2}$

4 $\frac{3^{2x+1}+12}{9^{2x}-2 3^{2x}-3} - \frac{9}{4(9^x-3)} \geq 0$

$\frac{3^{2x}\cdot 3+2^2\cdot 3}{(3^2)^{2x}-3^{2x}\cdot 2-3} - \frac{3^2}{2^2(9^x-3)} \geq 0$

$\frac{3^{2x}\cdot 3+2^2\cdot 3}{(3^2)^{2x}-(3^{2x}\cdot 2-3)} \geq \frac{3^2}{2^2(3^{2x}-3)}$

$3^{2x}=t$

$\frac{3t+12}{t^2-2t-3} - \frac{3^2}{3^2(t-3)} \geq 0$

$\frac{(3t+12)(4t-12)-9(t^2-2t-3)}{(t^2-2t-3)(4t-12)}$

$\frac{12t^2-36t+48t-144-9t^2+18t+27}{4t^3-12t^2-8t^2+24t-12t+36} \geq 0$

$\frac{3t^2+30t-117}{4t^3-20t^2+12t+36} \geq 0$

Somo svolti sempre i soliti calcoli, ma essendoci molti membri simili possiamo porre $3^{2x}=t$ e vediamo che nel corso della disequazione esse diventa come una disequazione di 2° grado

$N(x) > 0 \quad 3t^2 + 30t - 117 \geq 0$

$\Delta = 900 + 1404 = 48$

$x = \frac{-30 \pm 48}{6}$

$\frac{-78}{6} = -13$

$\frac{18}{6} = 3$

$D(x) > 0$ è nullo

$3^{2x} \geq 3$

$2^x \geq 1$

$x \geq \frac{1}{2}$

Sviluppiamo il numeratore e vediamo che abbiamo una soluzione negativa e una positiva, prendiamo in considerazione solo quest'ultima e la confrontiamo con $3^{2x} = t$ e quindi:

Il logaritmo

Sappiamo che l'equazione esponenziale $a^x=b$, con $a>0$, $a\neq 1$ e $b>0$, ammette una sola soluzione. A tale valore si da il nome di logaritmo in base a di b e si scrive: $x=\log_a b$.

Quindi dati due numeri reali positivi a e b, con $a\neq 1$, si chiama logaritmo in base a di b l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b.

I due numeri a e b vengono rispettivamente chiamati base ed argomento del logaritmo. Inoltre, qualunque sia la base a, si ha:

- $\log_a 1=0$ perché $a^0=1$
- $\log_a a=1$ perché $a^1=1$

Possiamo osservare anche che se due numeri positivi sono uguali, anche i loro logaritmi, rispetto a una stessa base, sono uguali:

$x=y \rightarrow \log_a x=\log_a y$

Vale il seguente teorema

All'aumentare dell'argomento b, il logaritmo $\log_a b$:

- aumenta, se $a>1$
- diminuisce, se $0<a<1$

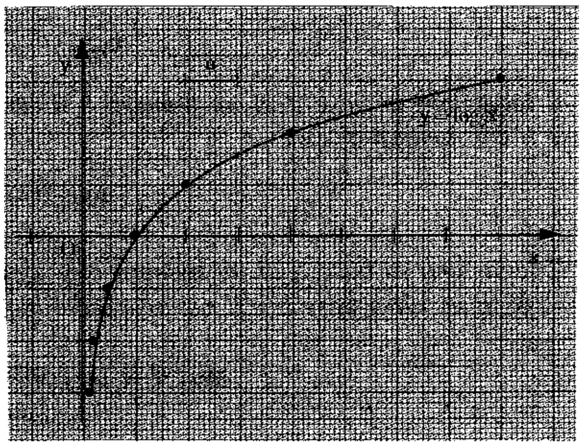
La funzione logaritmica

Se a è un numero positivo diverso da 1 l'espressione $\log_a x$ (con $x>0$) varia al variare di x; posto $y=\log_a x$, si ottiene una funzione che viene detta funzione logaritmica.

Prima funzione: $a > 1$ cioè $y = \log_2 x$

Tutte le funzioni logaritmiche $y = \log_2 x$ che hanno la base a maggiore di 1 hanno l'andamento della prima: sono crescenti, sono negative per $0 < x < 1$ e positive per $x > 1$, tendono a $-\infty$ per x tendente a 0 e a $+\infty$ per x tendente a $+\infty$

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

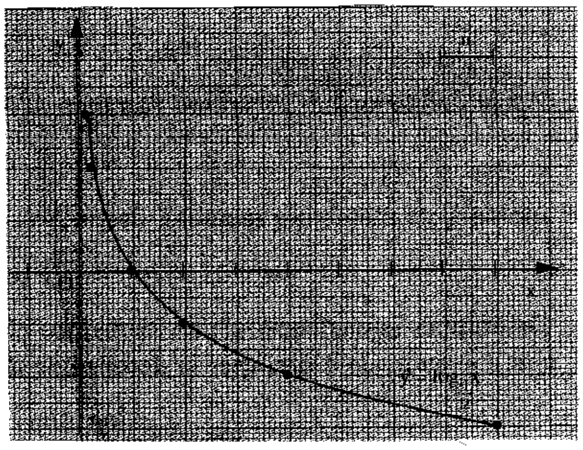


Rappresentazione grafica della funzione $y = \log_2 x$ nell'intervallo $\frac{1}{8} \leq x \leq 8$

Seconda funzione: $0 < a < 1$ cioè $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

tutte le funzioni $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ hanno la base a compresa tra 0 e 1 hanno l'andamento della seconda: sono decrescenti, sono positive per $0 < x < 1$ e negative per $x > 1$, tendono a $+\infty$ per x tendente a 0 e a $-\infty$ per x tendente a $+\infty$.

x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3



Rappresentazione grafica della funzione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nell'intervallo $\frac{1}{8} \le x \le 8$

Le proprietà dei logaritmi

I logaritmi godono di alcune proprietà

a il logaritmo di un prodotto di fattori positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori, cioè

$$\log_a(b \cdot c \cdot d) = \log_a b + \log_a c + \log_a d$$

b il logaritmo di un quoziente di due numeri positivi è uguale alla differenza tra il logaritmo del dividendo ed il logaritmo del divisore, cioè:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

c il logaritmo della potenza di un numero positivo, ad esponente reale qualunque, è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base della potenza cioè:

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

d Il logaritmo in base a di un numero b diverso da 1, é uguale al reciproco del logaritmo in base b del numero a, cioé:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

e Il logaritmo in base a di un numero N é uguale al prodotto tra il logaritmo dello stesso numero N in un altra base b e il reciproco del logaritmo di a in base b, cioé:

$$\log_a N = \log_b N \cdot \frac{1}{\log_b a} = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

detta anche formula del cambiamento di base

8 Un caso particolare

Poiché $\sqrt[m]{b} = b^{\frac{1}{m}}$, si può applicare la terza proprietá anche nel caso del logaritmo di una radice:

$$\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} \log_a b$$

Logaritmi decimali e logaritmi naturali.

L'insieme dei logaritmi di tutti i numeri reali positivi in una data base a viene chiamato sistema di logaritmi in base a. Tra tutti gli infiniti sistemi di logaritmi assumono particolare importanza quello in base 10, che viene chiamato logaritmo decimale o di Briggs, e quello in base e, che viene chiamato logaritmo naturale o neperiano che ha un valore di 2,718281828.

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \log_{10} x \cdot \frac{1}{\log_{10} e} \rightarrow$$

secondo la proprietá relativa al cambiamento di base, questo é il logaritmo in base e di un qualsiasi numero x positivo.

Le equazioni logaritmiche

Un'equazione nella quale compare il logaritmo dell'incognita, o di espressioni contenenti l'incognita, viene detta equazione logaritmica

Consideriamo l'equazione logaritmica

$\log_a A(x) = \log_a B(x)$

dove con $A(x)$ e $B(x)$ indichiamo due funzioni dell'incognita x

Per le condizioni d'esistenza dei logaritmi deve essere:

$A(x) > 0$ e $B(x) > 0$

Dal momento che

$A(x) = B(x) \rightarrow \log_a A(x) = \log_b B(x)$

Per risolvere l'equazione è sufficiente cercare le soluzioni di $A(x) = B(x)$ e controllare successivamente se queste soddisfano le condizioni di esistenza.

Esempio:

$2\log(x-2) = \log(x+5) + \log x$

I logaritmi contenuti in questa equazione hanno significato solo se alla x vengono attribuiti valori che soddisfano tutte le condizioni del sistema:

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x+5 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

e quindi i valori maggiori di 2. La condizione $x > 2$ è perciò la condizione che debbono soddisfare le soluzioni dell'equazione data:

Applicando ai due membri dell'uguaglianza le proprietà dei logaritmi si ottiene l'equazione

$$\log(x-2)^2 = \log[(x+5)x]$$

e quindi, uguagliando gli argomenti dei due logaritmi, viene:

$(x-2)^2=(x+5)x$

Risolvendo quest'ultima si ha $x=\frac{4}{9}$; poiché questo valore non soddisfa la condizione $x>2$ non è accettabile come soluzione dell'equazione proposta, che risulta pertanto essere impossibile

Esempio 2:

$\log_2(x^2+x+1)+3=\log_2(8-x^2)$

Sono accettabili solo soluzioni soddisfacenti entrambe le disequazioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ 8-x^2>0 \end{cases}$$

e quindi soddisfacenti la condizione

$-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$

Sostituendo il numero 3 il $\log_2 8$ e procedendo poi come descritto nel precedente esempio si ottiene:

$\log_2(x^2+x+1)+\log_2 8=\log_2(8-x^2)$

$\log_2[8(x^2+x+1)]=\log_2(8-x^2)$

$8(x^2+x+1)=8-x^2$

Le soluzioni di quest'ultima, che sono $x=0$ e $x=-\frac{8}{9}$, sono entrambe accettabili come soluzioni.

Non in tutti i casi è possibile ricondurre un'equazione logaritmica all'uguaglianza tra due logaritmi nella stessa base.

Esempio:

$\log_3 x-2=\frac{3}{\log_3 x}$

L'equazione è logaritmica e fratta; sono pertanto accettabili solo soluzioni soddisfacenti le condizioni $x>0$ e $\log_3 x \neq 0$, e quindi positive ma diverse da 1

Riducendo tutti i termini allo stesso m.c.d $= \log_3 x$ e liberando poi l'equazione dai denominatori si ha:

$\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0$

Risolvendo quest'ultima come un'equazione di 2° grado

nell'incognita $\log_3 x$ si ottiene:

$\log_3 x = 3$ e $\log_3 x = -1$

e quindi $x = 27$ e $x = \frac{1}{3}$ (soluzioni accettabili).

USIAMO UN'INCOGNITA AUSILIARIA

$\boxed{\text{Esempio:}}$

$(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0$

Le condizioni di esistenza del logaritmo $x>0$

Posto $\log_3 x = t$, otteniamo

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$t = 1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

da cui:

$\log_3 x = -1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$

$\log_3 x = 3 \rightarrow x_{II} = 27$

Entrambe sono soluzioni accettabili perché soddisfano

la condizione di esistenza.

Le disequazioni logaritmiche

$\log_a A(x) < \log_a B(x)$

Per passare da una disequazione di questo tipo a una fra i due argomenti dobbiamo ricordare il comportamento della funzione logaritmica:

- per $a > 1$ $\quad \log_a b < \log_a c \rightarrow b < c$
- per $0 < a < 1$ $\quad \log_a b < \log_a c \rightarrow b > c$

con $b, c > 0$.

Le soluzioni di una disequazione logaritmica del tipo considerato si ottengono risolvendo il sistema formato da:

1 le condizioni di esistenza della disequazione

2 la disequazione che si ottiene dalla disuguaglianza degli argomenti

Esempi:

1 $\quad \log_3 (x^2 - 2x - 2) > 0$

La base del logaritmo è maggiore di 1; affinché il logaritmo sia positivo deve allora essere maggiore di 1 l'argomento; deve cioè essere:

$x^2 - 2x - 2 > 1$ si ha quindi

$x^2 - 2x - 3 > 0$ e pertanto $x < -1$ e $x > 3$.

2 $\begin{cases} x+4 > 0 \\ x+4 < 1 \end{cases}$

La base del logaritmo è minore di 1 e pertanto il logaritmo è positivo quando l'argomento è minore di 1; la condizione $x+4 > 0$ è necessaria per l'esistenza del logaritmo

risolvendo il sistema si ottiene:

$-4 < x < -3$.

3 $2\log x - \log(x+2) + \log 8 > \log(2-x)$

Imponiamo le condizioni di esistenza

$$\begin{cases} x>0 \\ x+2>0 \\ 2-x>0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>-2 \\ x<2 \end{cases} \longrightarrow 0<x<2$$

Trasportiamo $\log(x+2)$ a secondo membro, in modo tale che i coefficienti dei logaritmi siano tutti positivi:

$2\log x + \log 8 > \log(2-x) + \log(x+2)$ (logaritmo di una potenza)

$\log 8x^2 > \log(2-x)(x+2)$ (logaritmo di un prodotto)

$8x^2 > 4-x^2 \longrightarrow 9x^2-4>0$

Ora risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 0<x<2 & \text{(condizione di esistenza)} \\ 9x^2-4>0 & \text{(disequazione fra gli argomenti)} \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$\frac{2}{3}<x<2$

4 USIAMO UN'INCOGNITA AUSILIARIA

$\log_2(5x-6)<3+\frac{4}{\log_2(5x-6)}$ poniamo $y=\log_2(5x-6)$ e sostituiamo:

$y<3+\frac{4}{y} \longrightarrow \frac{y^2-3y-4}{y}<0$

ora abbiamo una disequazione algebrica fratta che ha per soluzioni:

$y<-1 \quad \vee \quad 0<y<4$

Ora risolviamo le due disequazioni logaritmiche:

1 $\log_2(5x-6)<-1$, 2 $0<\log_2(5x-6)<4$.

(1) $\begin{cases} 5x-6>0 \\ \log_2(5x-6)<\log_2\frac{1}{2} \end{cases}$ condizione di esistenza; poiché $-1=\log_2\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x>\frac{6}{5} \\ 5x-6<\frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x>\frac{6}{5} \\ 10x<13 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x>\frac{6}{5} \\ x<\frac{13}{10} \end{cases}$$

Le soluzioni della prima disequazione sono $S_1=\left\{x: \frac{6}{5}<x<\frac{13}{10}\right\}$

②

$$\begin{cases} 5x-6>0 \\ \log_2(5x-6)<\log_2 16 \\ \log_2(5x-6)>\log_2 1 \end{cases}$$

condizione di esistenza dei logaritmi

$4=\log_2 16$

$0=\log_2 1$

$$\begin{cases} x>\frac{6}{5} \\ 5x-6<16 \\ 5x-6>1 \end{cases} \;\; -> \;\; \begin{cases} x>\frac{6}{5} \\ x<\frac{22}{5} \\ x>\frac{7}{5} \end{cases}$$

Le soluzioni della seconda disequazione sono:

$S_2=\left\{x: \frac{7}{5}<x<\frac{22}{5}\right\}$

quindi le soluzioni di tutta la disequazione sono:

$S=S_1\cup S_2=\left\{x: \frac{6}{5}<x<\frac{13}{10} \vee \frac{7}{5}<x<\frac{22}{5}\right\}$

Progetto: Maria Galletta