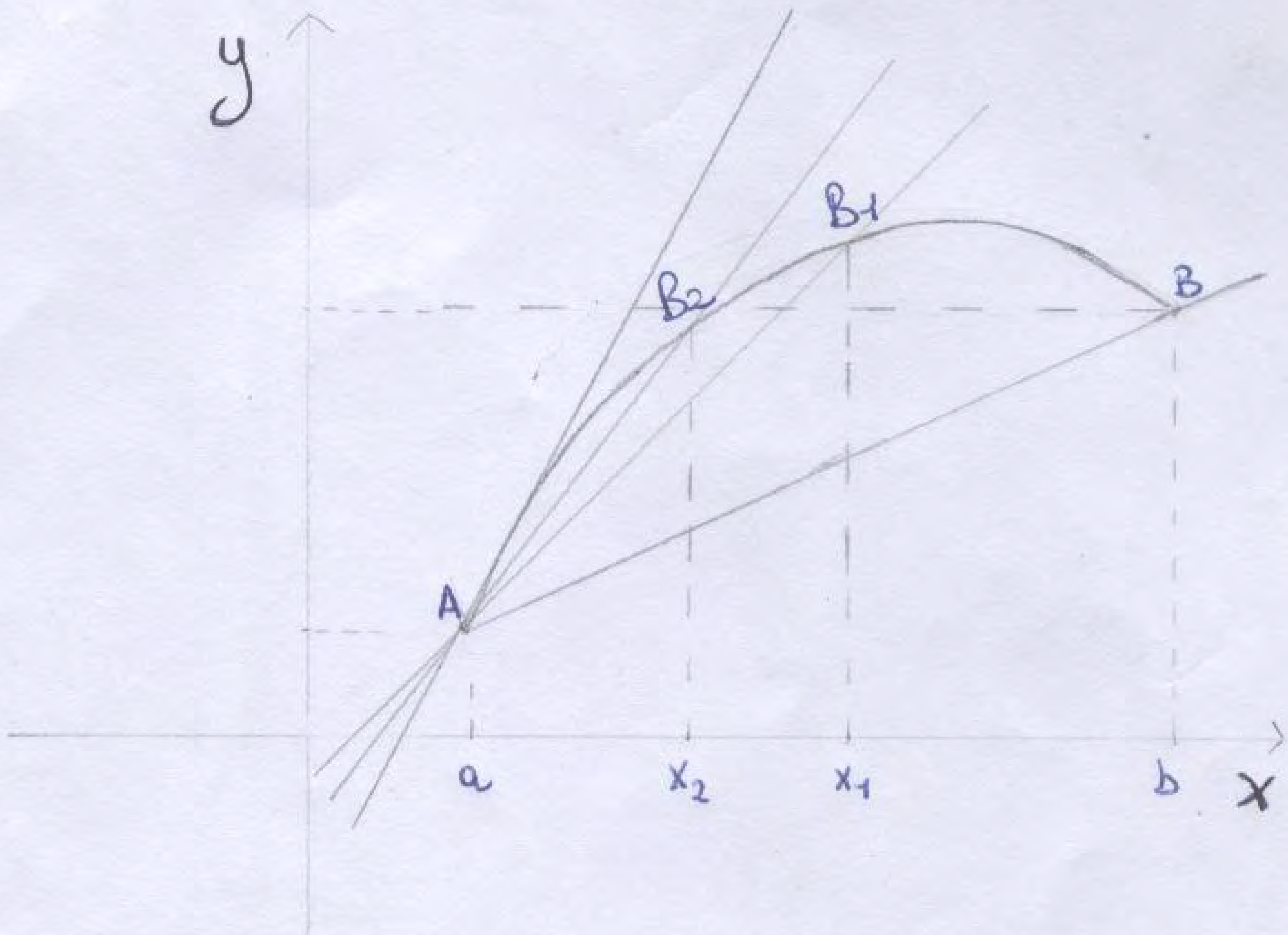
LE DERIVATE

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a, b]$

$C.E. = \left\{ D\{f\} \right\}$



$$m_{SECANTE} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

↑
COEFFICIENTE ANGOLARE

$$m_{SECANTE} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \leftarrow \text{RAPPORTO INCREMENTALE}$$

Immaginiamo di tenere fermo il punto A e di avvicinare il punto B ad A.

Dalla figura si evince che quando il punto B si avvicina al punto A, la retta da secante tende a disporsi tangente.

La tangente è una posizione limite che non dipende dalla scelta del punto B. In particolare la figura poteva essere sviluppata disegnando il punto B a sinistra del punto A, per cui la convergenza deve risultare vera sia da destra che da sinistra.
Se esiste ed è finito il valore di questo limite, esso si chiama DERIVATA DELLA FUNZIONE.

Geometricamente questo valore rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto da noi scelto.
Questo perché l'operazione di limite non modifica la natura della quantità su cui si sta operando:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La derivata si indica con uno qualunque dei seguenti simboli:
$f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $[Df(x)]_{x=x_0}$, o anche: $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$, ecc.

DERIVATE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

- $y = f(x) = \operatorname{sen} x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \cos x \cdot 1 = \cos x$$

- $y = f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\operatorname{sen}\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = -\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{2x+h}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} =$$

$$= -\operatorname{sen}x \cdot 1 = -\operatorname{sen}x$$

- $y = f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)}-e^x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x\cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{e^h} =$$

$$= e^x \cdot 1 = e^x$$

- $y = f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$$

- $y = f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{PER LA REGOLA}\\ \text{DELLA POTENZA}\\ \text{SUI LOG}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \left\{\begin{matrix}\text{PER LA CONTINUITA'}\\ \text{DELLA FUNZIONE}\\ \text{LOG}\end{matrix}\right\} = \ln\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] =$$

$$= \ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] =$$

PONIAMO $\frac{h}{x} = t \rightarrow \begin{matrix} h\to 0 \\ t \to 0\end{matrix}$

$$= \ln \lim_{t\to 0} (1+t)^{xt} = \ln\left[\lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{1}{x}} = \ln\left[e^{\frac{1}{x}}\right] = \frac{1}{x}\ln e =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

- $y = f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ C.E.: $\{\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

REGOLA DELLA POTENZA

PROCESSO DELL'INDUZIONE MATEMATICA

Se $f(x) = x^m$, con $m \in \mathbb{R}$, risulta: $f'(x) = m x^{m-1}$.

Pertanto applicando tale formula avremo:

se $m=0 \implies f(x)=1 \rightarrow f'(x)=0$

se $m=1 \implies f(x)=x \rightarrow f'(x)=1$

se $m=2 \implies f(x)=x^2 \rightarrow f'(x)=2x$

se $m=3 \implies f(x)=x^3 \rightarrow f'(x)=3x^2$

Per vedere se la regola è valida bisogna applicare il

METODO DI INDUZIONE:

1. BASE

2. Hp $K \leq m$

3. Th DIMOSTRAZIONE

$Hp \implies f(x) = x^K \rightarrow f'(x) = K x^{K-1}$

$Th \implies$ Se $f(x) = x^{K+1} \rightarrow f'(x) = (K+1) x^K$

$\underline{f(x) = x^{k+1}}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{k+1} - x^{k+1}}{h} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k (x+h) - x^k \cdot x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k (x+h) - (x+h)x^k +}{h}$$

$$\frac{+(x+h)x^k - x^k \cdot x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\left[(x+h)^k - x^k\right] + x^k \left[\cancel{x} + h - \cancel{x}\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{(x+h)(x+h)^k - x^k}{h} + x^k \cdot \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} (x+h)\left[\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h}\right] + x^k = x \cdot Dx^k + x^k =$$

$$= x\left(k x^{k-1}\right) + x^k = k x^k + x^k =$$

$$= (k+1)x^k$$

$$\boxed{D x^n = n\, x^{n-1}}$$

Come caso particolare, si ha:

$$D\sqrt[n]{x} = D\, x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

cioè:

$$\boxed{D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}$$

TEOREMI SULLE DERIVATE

① DERIVATA DI UNA SOMMA

$$D[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha D f(x) + \beta D g(x)$$

Se abbiamo due funzioni derivabili $g(x)$ e $f(x)$, allora qualunque combinazione lineare $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è anche una funzione derivabile e la sua derivata esiste ed è eguale alla somma delle singole derivate: $\alpha D f(x) + \beta D g(x)$.

Le costanti moltiplicative (α, β) non partecipano all'operazione di derivata.

PER ESEMPIO:

- $f(x) = 3\,\mathrm{sen}\,x - 5\sqrt{x} + x^4$

  $f'(x) = 3\cos x - 5\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 4x^3$

- $f(x) = 5\ln x + 7\cos x$

  $f'(x) = \dfrac{5}{x} - 7\,\mathrm{sen}\,x$

② DERIVATA DI UN PRODOTTO

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

La derivata del prodotto di due funzioni derivabili $g(x)$ e $f(x)$ esiste ed è uguale al prodotto della derivata del primo fattore per il secondo, più il prodotto del primo fattore per la derivata del secondo.

PER ESEMPIO:

- $f(x) = x^3 \cdot \cos x$

  $f'(x) = 3x^2 \cdot \cos x + x^3(-\operatorname{sen} x) = 3x^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x$

In particolare, la funzione:

$$y = [f(x)]^n \,,$$

con n intero positivo maggiore di 1, ha come derivata:

$$y' = n\,[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x) \,.$$

③ DERIVATA DI UN QUOZIENTE

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

La derivata del quoziente di due funzioni derivabili $g(x)$ e $f(x)$ esiste ed è eguale a una frazione avente al denominatore il quadrato del denominatore e al numeratore la differenza tra il prodotto del denominatore per la derivata del numeratore e il prodotto del numeratore per la derivata del denominatore.

PER ESEMPIO:

- $D(tgx) = D\left(\frac{senx}{cosx}\right) =$

$$= \frac{cosx\cdot cosx - (-senx)(senx)}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x} =$$

$$= 1 + tg^2x$$

- $D(ctgx) = D\left(\frac{cosx}{senx}\right) =$

$$= \frac{(-senx)(senx) - cosx\cdot cosx}{sen^2x} = \frac{-sen^2x - cos^2x}{sen^2x} = -\frac{1}{sen^2x} =$$

$$= -(1 + ctg^2x)$$

SIGNIFICATO PRATICO DELLE DERIVATE

Il calcolo delle derivate di una funzione si applica in tutti i campi della fisica, della chimica e della biologia, ed è inoltre la base indispensabile delle telecomunicazioni. Nel periodo attuale l'applicazione principale è quella dei segnali elettromagnetici. Nella matematica pura risolve semplicemente il problema della tangente ad una curva, senza l'uso del calcolo dei sistemi. Nella fisica serve per parlare di velocità, accelerazioni, forze, momenti angolari, calore specifico, entropia, entalpia, e soprattutto la corrente elettrica, che viene vista come la derivata della carica rispetto al tempo.

$$D_t [Q]$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

Una delle più importanti regole di derivazione riguarda le derivate delle funzioni composte.

Siano date due funzioni:

$$y = f(u) \quad e \quad u = g(x),$$

e supponiamo che la funzione $u = g(x)$ assuma valori apparte= nenti al dominio della funzione $y = f(u)$. In questo modo le due funzioni definiscono la <u>FUNZIONE COMPOSTA</u> $f[g(x)]$. Poniamo:

$$\underline{F(x) = f[g(x)]} \; .$$

La derivata di una funzione composta è il risultato del calco= lo della derivata di ogni singola funzione, ciascuna con la pro= pria variabile indipendente:

$$\underline{D\big[f[g(x)]\big] = f'(u) \cdot g'(x)} \; .$$

<u>PER ESEMPIO</u>:

- $y = \operatorname{sen}\sqrt{x+1}$

$$y' = \cos\sqrt{x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 = \frac{\cos\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$$

DERIVATE DELLE FUNZIONI INVERSE

Sia $y=f(x)$ una funzione reale della variabile reale x, continua e invertibile in un intervallo I e sia $x=g(y)$ la sua inversa.

Se $f(x)$ è derivabile nel punto $x_0 \in I$, con derivata $f'(x_0) \neq 0$, allora anche $g(y)$ è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e si ha:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

PER ESEMPIO:

Applichiamo questo teorema per dimostrare che:

$$D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Essendo $y = \operatorname{arcsen} x$ l'inversa della funzione $x = \operatorname{sen} y$, si ha:

$$D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{D \operatorname{sen} y} = \frac{1}{\cos y}$$

$\cos y = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$

Poiché $\cos y > 0$ si ha $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. Quindi:

$$D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

INVERTIBILITÀ DI UNA FUNZIONE

DEFINIZIONE: Una funzione è invertibile nel C.E. se e solo se è biunivoca.

PROPRIETÀ: $f'(x) > 0$ oppure $f'(x) < 0$ SEMPRE

APPROFONDIMENTI

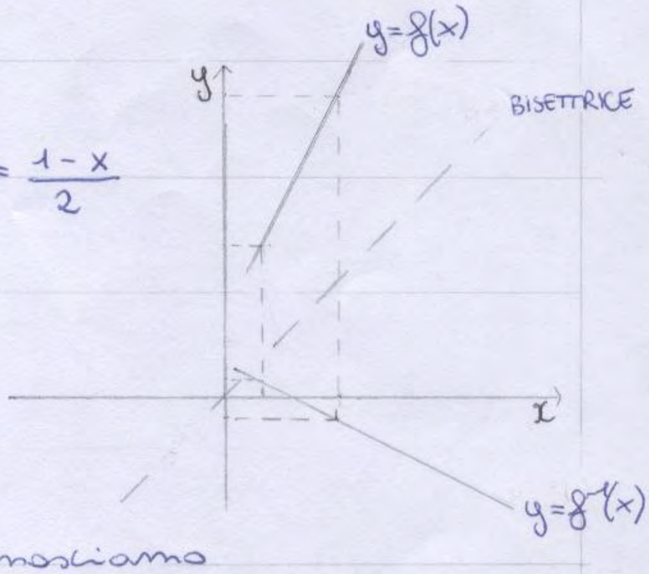
$y = f(x) = 2x + 1$

$f'(x) = 2 \implies f'(x) > 0$ sempre

quindi $f(x)$ è invertibile

$y = 2x + 1$

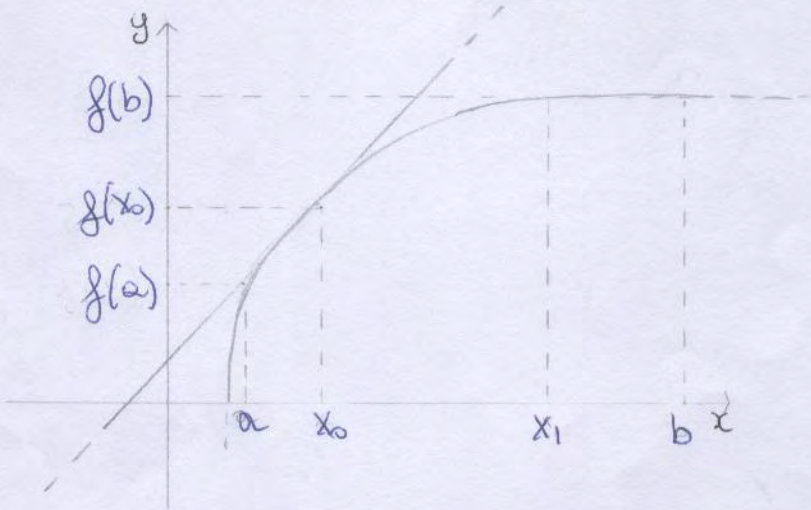
$$x = \frac{1-y}{2} \implies \begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \implies y = \frac{1-x}{2}$$



Il grafico della funzione inversa è simmetrico alla funzione. Quindi se conosciamo la funzione inversa o diretta possiamo disegnare la corrispondente funzione in base alla bisettrice del grafico.

CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ

Il concetto di continuità si traduce nell'ambito delle funzioni nel fatto di poter calcolare l'ordinata della funzione $f(x_0)$ quando è assegnato x_0 senza interruzioni.
Il carattere della derivabilità permette di tracciare la retta tangente alla curva della funzione.



Particolare importanza assumono gli intervalli chiusi contenuti nel dominio della funzione.

① TEOREMA DI CONTINUITÀ

Una funzione derivabile è sicuramente continua.

Se $f(x)$ è derivabile in $x_0 \in]a, b[\Rightarrow f(x)$ è continua in $x_0 \in [a, b]$.

Il contrario, invece, non è sempre vero: ad esempio, la funzione $f(x) = |x|$ è continua su tutto il dominonio, ma non è derivabile nel punto $x = 0$, perché la derivata destra non coincide con la derivata sinistra.

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

CONSIDERO $x_0 = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} |x| = |x_0| = 0 \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} |x| = |x_0| = 0 \\ f(x_0) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x_0) = f'(0) = \nexists$$

DIMOSTRAZIONE ① TEOREMA

$f(x)$ derivabile $\Rightarrow f(x)$ continua .

Partendo dalla definizione di derivata:

$$\text{Hp} \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \Big| \Rightarrow \text{Th} \quad \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)] = 0$$

Per definizione di limite:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

$$f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < f'(x) + \varepsilon$$

$$h f'(x) - \cancel{\varepsilon h} \leq f(x+h) - f(x) \leq h f'(x) \cancel{+ \varepsilon h}$$

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = 0$$

② TEOREMA DI ROLLE

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$ allora esiste un punto x_0 appartenente all'intervallo aperto $]a, b[$ di $f'(x)$ dove la derivata prima si annulla.

Hp $\begin{cases} y = f(x) \\ I = [a; b] \subseteq D\{f\} \\ f(x) \text{ è continua in } [a, b] \\ f(x) \text{ è derivabile in }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$	Th $\exists\, x_0 \in\,]a, b[$ tale che $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE.

Per Hp la $f(x) \in C^1 [a, b]$, allora per il teorema di WEIERSTRASS essa ammette il massimo assoluto e il minimo assoluto.

Per la funzione $f(x)$ si possono presentare due casi:

1) $f(x) = K$ (costante) 2) $f(x)$ non è costante.

Se $f(x)=K$ il teorema è banale, perché $f'(x)=0 \quad \forall\, x \in\,]a,b[$,

cioè in ogni punto di $[a,b]$ verifica il teorema.

Se $f(x)$ non è costante, allora avrà un massimo e un minimo.

Sia x_1 l'ascissa del minimo e x_2 l'ascissa del massimo.

Si consideri il massimo assoluto x_2 e $I_h(x_2)$ (intorno x_2 di altezza h)

$$f(x_2-h)-f(x_2)\leq 0 \qquad\qquad f(x_2+h)-f(x_2)\leq 0.$$

Dividendo la prima disuguaglianza per $-h$ e la seconda per $+h$, si ottiene:

$$\frac{f(x_2-h)-f(x_2)}{-h}\geq 0 \qquad\qquad \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}\leq 0$$

↳ Rapporto incrementale SINISTRO della $f(x)$ relativo al punto x_2 e all'incremento h.

↳ Rapporto incrementale DESTRO relativo allo stesso punto.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_2-h)-f(x_2)}{-h}\geq 0 \qquad\qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}\leq 0$$

I limiti, per $h\to 0$, dei due rapporti incrementali esistono, sono finiti ed eguali fra loro.

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(x_2)\geq 0 \qquad\qquad f'_+(x_2)\leq 0 \\ \text{Per } H_p \Rightarrow f'_+(x_2)=f'_-(x_2)\end{array}\right| \Rightarrow f'(x_2)=0$$

③ TEOREMA DI LAGRANGE O DEL VALOR MEDIO

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, allora esiste almeno un punto x_0 appartenente ad $]a,b[$ per cui:

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Hp $y=f(x) \quad I=[a,b]$

$f(x) \in C^0(f)$

$f(x) \in C^1(f)$

$\Longrightarrow$

Th $\exists \; x_0 \in I^* \equiv \;]a,b[$

tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$

DIMOSTRAZIONE

Si deve costruire una funzione alternativa che verifichi il teorema di ROLLE: poiché una combinazione lineare di funzioni continue e derivabili risulta sempre una funzione continua e derivabile, per ipotesi costruisco la funzione ausiliaria:

$$\varphi(x) = f(x) + Kx$$

Affinché questa funzione verifichi il teorema di ROLLE bisogna imporre la terza condizione, perché le altre due sono automaticamente verificate essendo combinazioni lineari di funzioni continue e derivabili.

$$\varphi(b) = \varphi(a)$$

Calcoliamo $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(b) = f(b) + kb \\ \varphi(a) = f(a) + ka \end{array}\right| \Rightarrow f(b) + kb = f(a) + ka$$

Da questa relazione si ricava il valore di k, che verifica la condizione imposta:

$$f(b) - f(a) = -k(b-a)$$

$$k = -\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot x$$

Poiché la $\varphi(x)$ verifica il teorema di ROLLE:

$$\exists \; x_0 \in \;]a,b[\text{ tale che}$$

$$\varphi'(x_0) = 0$$

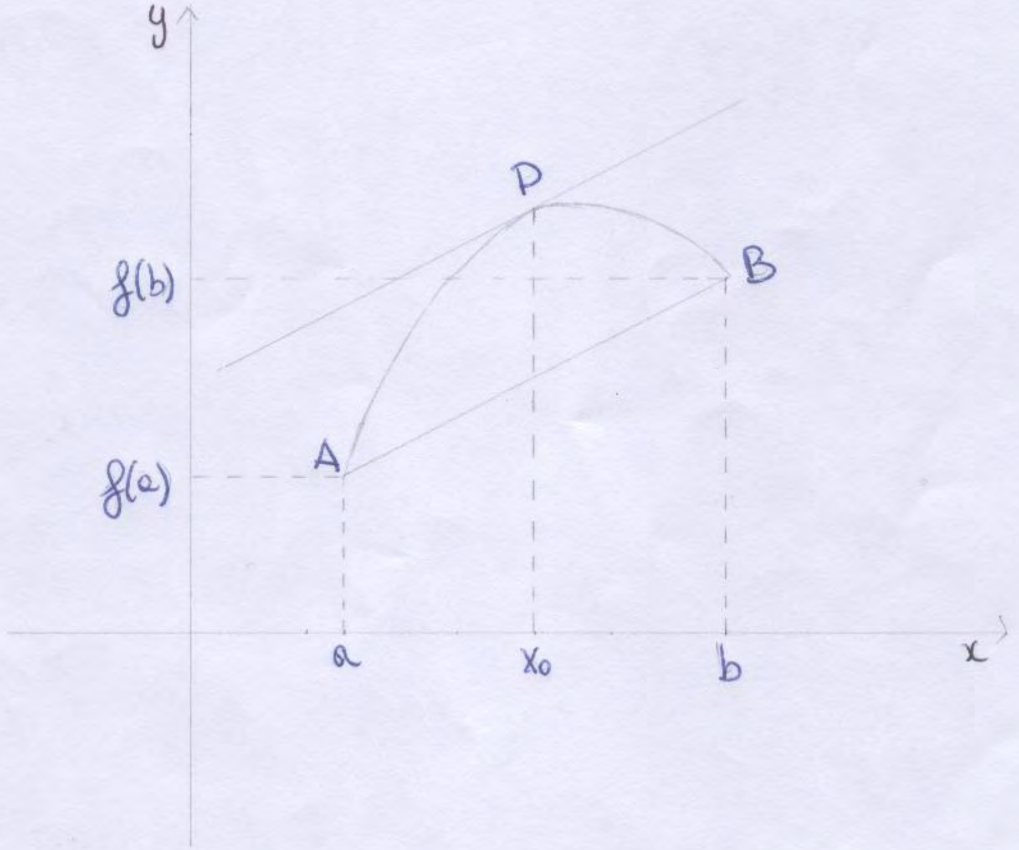
$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot 1$$

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \longrightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

OSSERVAZIONI SUL TEOREMA DI LAGRANGE

Geometricamente il teorema di Lagrange si interpreta dicendo:

"Se un arco di curva continua è dotato di tangente in ogni suo punto, esclusi al più gli estremi, esiste almeno un punto interno all'arco nel quale la tangente è parallela alla corda che congiunge i punti estremi all'arco.



④ TEOREMA DI CAUCHY O DEGLI INCREMENTI FINITI

Siano $f(x)$ e $g(x)$ definite in $I = [a,b]$

1. $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in $[a,b]$
2. $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $]a,b[$
3. $g(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in I^* \equiv \,]a,b[$

allora $\exists\; x_0 \in I^*$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Il teorema di Cauchy serve a valutare come varia una delle due funzioni rispetto all'altra.

DIMOSTRAZIONE

Si costruisce $F(x) = f(x) + Kg(x)$ e si determina K in modo che sia $F(a) = F(b)$ per applicare il teorema di ROLLE.

$$F(a) = f(a) + Kg(a)$$

$$F(b) = f(b) + Kg(b)$$

dovendo essere $F(a) = F(b)$ segue: $\longrightarrow$

$$f(a) + K g(a) = f(b) + K g(b) \quad .$$

Trovo il valore di K :

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad .$$

Con questo valore di K la F(x) diventa :

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x) \quad .$$

La F(x) trovata verifica il teorema di ROLLE, per cui

$$\exists \; x_0 \in (a,b) \text{ tale che } F'(x_0) = 0 \quad .$$

Segue: $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$.

Per $x = x_0$:

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x_0) = 0$$

da cui:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad .$$

Considerando in particolare la funzione $g(x) = x$, si ottiene l'affermazione del teorema di LAGRANGE :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(x_0)}{1} \quad .$$

⑤ TEOREMA DI DE L'HÔSPITAL: RAPPORTO DI DUE INFINITESIMI

(Hp) 1. Siano $f(x)$ e $g(x)$ definite in $x = x_0$

2. Sia $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) = 0$

3. Esistono $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$

4. $g'(x_0) \neq 0 \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$

5. Se esiste finito il $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mathcal{L}$

allora $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathcal{L}$

ESEMPIO:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\mathcal{L}' = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \Longrightarrow \mathcal{L} = 1$$

Il teorema di De L'Hospital vale anche nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Se bisogna calcolare limiti che si presentano sotto altre forme indeterminate $\{0 \cdot \infty;\ 0^0;\ 1^\infty;\ +\infty - \infty\}$ bisogna portarli alle forme $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$, prima di provare il teorema.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

Si considerano due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime per $x = x_0$.

In tale ipotesi: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

Per ipotesi, sia per la funzione $f(x)$ sia per la funzione $g(x)$ è possibile trovare un intorno di x_0 dove applicare il teorema di ROLLE:

$\forall\, x \in I_\delta(x_0)$ si può scrivere il risultato del teorema di Cauchy: $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Essendo $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) = 0$, segue che:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$