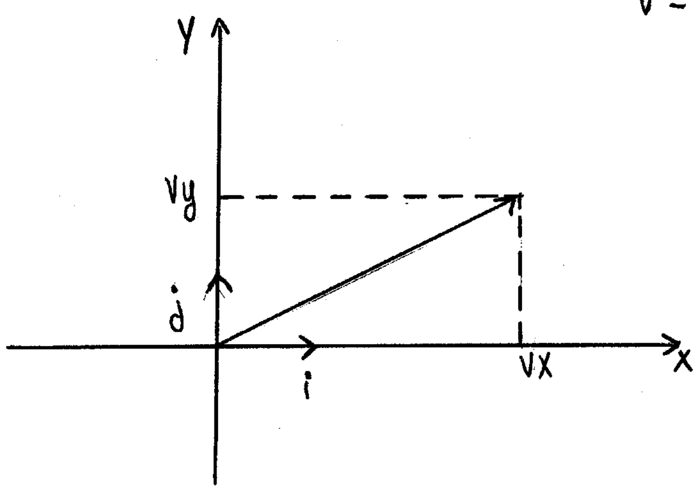
IL MOTO DEL PROIETTILE

DANIELA PERINA
classe 5^{a} H

IL MOTO DEL PROIETTILE

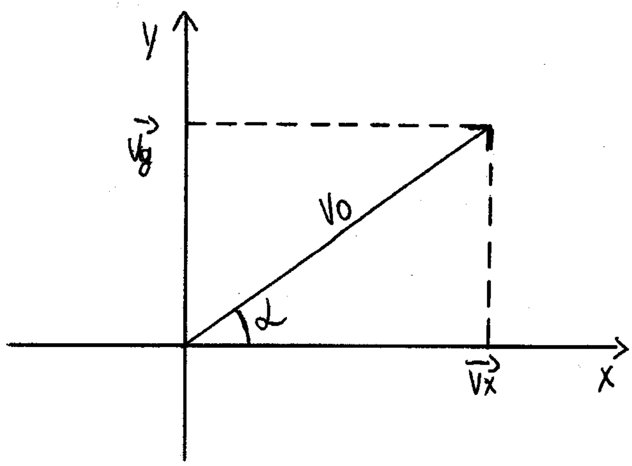
Scomporre un vettore significa trovare altri due vettori, la cui somma sia uguale al vettore dato. Un vettore **v** può essere scomposto lungo le direzioni **r** e **s** conducendo dalla punta del vettore le parallele alle rette r ed s. Le intersezioni di tali parallele con r e s definiscono le componenti v lungo r e lungo s:

$$V = V_r + V_s$$



$$V = v_x i + v_y j$$

Perciò dalla possibilità di comporre vettorialmente le velocità nasce lo studio del moto parabolico di un proiettile lanciato con una velocità di modulo v e con angolo α rispetto all'orizzontale della Terra.



Possiamo considerare un sistema di riferimento in cui l'asse x sia orientato lungo la superficie della Terra mentre l'asse y sia $\perp$ ad esso e rivolto verso l'alto.
Supponiamo inoltre di lanciare il corpo dall'origine del sistema di riferimento ad una velocità iniziale v_0
Se proiettiamo il vettore velocità lungo i 2 assi avremo:

① $V_{0x} = V_0 \cos\alpha$ ② $V_{0y} = V_0 \operatorname{sen}\alpha$

Tutti i corpi lanciati verso l'alto sono sottoposti ad una accellerazione di gravità rivolta verso il basso perciò il moto lungo la verticale sarà un moto uniformemente accellerato perciò il moto lungo y sarà:

$$V_y = V_{0y} - gt$$
$$y = V_{0y}t - g\frac{t^2}{2}$$

lungo l'asse x invece non vi è alcuna accellerazione poichè g è ⊥ alla superficie della Terra. Accellerazione nulla vuol dire velocità costante per cui il moto lungo l'asse x sarà rettilineo uniforme perciò:

$$V_x = V_{0x}$$

$$x = V_{0x} t$$

Per calcolare la traiettoria dovremo collegare queste 2 equazioni. Ju questo sappiamo che una traiettoria è l'insieme dei punti occupati dal corpo nel suo moto: Sapendo che $t = \frac{x}{V_{0x}}$ avremo:

$$y = \frac{V_{0y}}{V_{0x}} \cdot x - \frac{g}{2V_0^2x} \cdot x^2$$

Otterremo così l'equazione di una parabola del tipo: $y = ax + bx^2$

Utilizzando le definizioni ① e ② avremo:

$$y = tg\alpha x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}$$

Da questa equazione possiamo calcolare la gittata:

GITTATA:

Per gittata si intende la distanza fra il punto di lancio e il punto di caduta.

Dove il punto di caduta è il punto in cui $y=0$

Da questa considerazione otterremo:

$$0 = \frac{g}{2V_{0}x^2} \cdot x^2 + \frac{Voy}{Vox} \cdot x$$

$$\frac{g}{2V_{0}x^2} \cdot x^2 - \frac{Voy}{Vox} \cdot x = 0$$

$$x\left(\frac{g}{2V_{0}x^2} \cdot x - \frac{Voy}{Vox}\right) = 0$$

$\frac{Voy}{Vox}$ diventa nullo quando $x=0$ oppure quando il termine racchiuso nelle parentesi è nullo.

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{g}{2v_0^2 x} \cdot x$$

$$x = \frac{v_{0y}}{\cancel{v_{0x}}} \cdot \frac{2v_0^{\cancel{2}}x}{g} = \frac{v_{0y} \cdot 2v_0 x}{g}$$

$$x = \frac{2v_{0y}v_{0x}}{g}$$

Sostituendo la ① e la ②

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha$$
$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$

$$x = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}{g}$$

Sapendo che $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ avremo:

$$x = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}2\alpha}{g}$$

Questa ci permette di calcolare dato un certo valore della velocità iniziale v_0 per quale angolo di tiro un corpo raggiunge la distanza massima.

Per esempio il valore massimo di $\sin 2\alpha$ è 1

Il seno di un angolo è 1 a 90° perciò:

$$2\alpha = 90°$$

$$\alpha = 45°$$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° \cdot \sin 45° = \frac{1}{2}$$

$$X = 2v_0^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \cancel{2}v_0^2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{g} =$$

$$= \frac{v_0^2}{g}$$

Per calcolare la gittata massima di un colpo di pistola:

$$V = 300\ m/s$$

$$X = \frac{300^2\ m/s}{9{,}81} = 9174{,}31\ m/s = 9{,}174\ Km/h$$

1° Teorema sui triangoli RETTANGOLI

Un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto da calcolare

$V_1x = V_1 \cdot \operatorname{sen} \beta$ $\qquad$ $V_1y = V_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha$

2° Teorema sui triangoli RETTANGOLI

Un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente:

$V_1x = V_1 \cdot \cos \alpha$ $\qquad$ $V_1y = V_1 \cdot \cos \beta$

3° Teorema sui triangoli RETTANGOLI

Un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto da calcolare

$V_1x = V_1y \cdot tg\, \beta$ $\qquad$ $V_1y = V_1x \cdot tg\, \alpha$

$\frac{1}{tg}\alpha$ = cotangente di α è uguale al reciproco della tg ➡ $tg\, x = \frac{1}{cotg\, \alpha}$

$$y = -\frac{g}{2v_{0x}^2} \cdot x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x$$

$$y = \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 + \frac{v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha}{v_0 \cdot \cos\alpha} \cdot x$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot x^2 + \operatorname{tg}\alpha \cdot x$$

Per la relazione fondamentale della goniometria:

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot \frac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot x^2 + \operatorname{tg}\alpha \cdot x$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \right) \cdot x^2 + \operatorname{tg}\alpha \cdot x$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} \left(\operatorname{tg}^2\alpha + 1 \right) x^2 + \operatorname{tg}\alpha \cdot x$$

$$y + \frac{g}{2v_0^2} \cdot \operatorname{tg}^2\alpha \cdot x^2 + \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 - \operatorname{tg}\alpha \cdot x = 0$$

$$\frac{g \cdot x^2}{2v_0^2} \cdot \operatorname{tg}^2\alpha - x \cdot \operatorname{tg}\alpha + \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right.$$