STUDIO DI FUNZIONE

Lo studio completo di una funzione comprende i seguenti punti:

1) Determinazione del campo di esistenza della funzione
2) Intersezione con l'asse x
3) Intersezione con l'asse y
4) Studio della positività e della negatività della funzione
5) Ricerca degli asintoti della funzione
6) Calcolo della derivata prima
7) Studio di crescenza e decrescenza della funzione e ricerca di eventuali estremi relativi
8) Calcolo della derivata seconda
9) Studio di concavità e convessità della funzione e ricerca di eventuali punti di flesso
10) Grafico

Studio della funzione γ:

$$y = \frac{2x+3}{x+4}$$

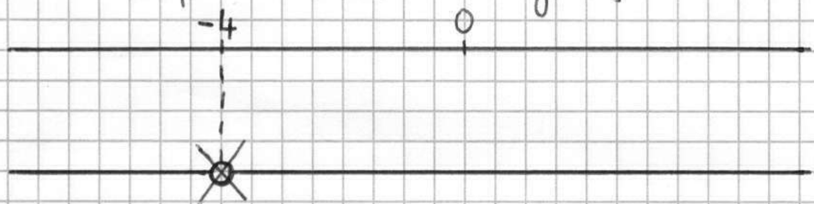
1) DETERMINAZIONE DEL CAMPO DI ESISTENZA DELLA FUNZIONE

$$y = \frac{2x+3}{x+4}$$

La funzione e' fratta, quindi il denominatore deve essere diverso da zero, altrimenti la funzione andrebbe a infinito

C.E.: $x+4 \neq 0$; $x \neq -4$

Rappresento il campo di esistenza graficamente:



e per intervalli:

C.E.: $\forall x \in \,]-\infty; -4[\, \cup \,]-4; +\infty[$

2) INTERSEZIONE CON L'ASSE X

Metto a sistema la funzione con l'equazione dell'asse x

$$\gamma \cap A_x : \begin{cases} y = \dfrac{2x+3}{x+4} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x+3}{x+4} = 0 \; ; \; 2x+3=0 \; ; \; 2x=-3 \; ; \; x = -\frac{3}{2}$$

(L'equazione e' uguale a 0 se il numeratore e' uguale a 0)

Chiamo A il punto di intersezione con l'asse x, di coordinate:

$$A \equiv \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$$

3) $\boxed{\text{INTERSEZIONE CON L'ASSE Y}}$

Metto a sistema la funzione con l'equazione dell'asse y

$$\gamma \cap A_y : \begin{cases} y = \dfrac{2x+3}{x+4} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2(0)+3}{0+4} = \frac{3}{4}$$

Chiamo B il punto di intersezione con l'asse y, di coordinate:

$$B \equiv \left(0; \frac{3}{4}\right)$$

4) $\boxed{\text{STUDIO DELLA POSITIVITA' E DELLA NEGATIVITA' DELLA FUNZIONE}}$

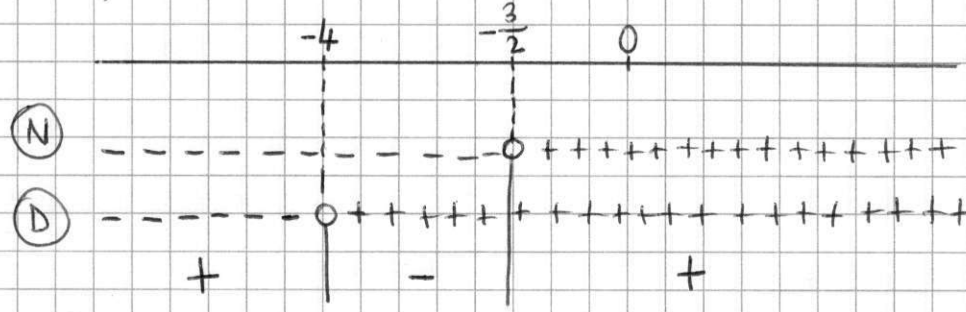
Devo calcolare dove la funzione e' positiva (si trova quindi nel I e nel II quadrante) e dove la funzione e' negativa (si trova nel III e nel IV quadrante) studiando dove la funzione e' maggiore di 0:

$$\frac{2x+3}{x+4} > 0$$

Studio del numeratore e del denominatore:

N $2x+3>0$; $2x>-3$; $x>-\frac{3}{2}$

D $x+4>0$; $x>-4$



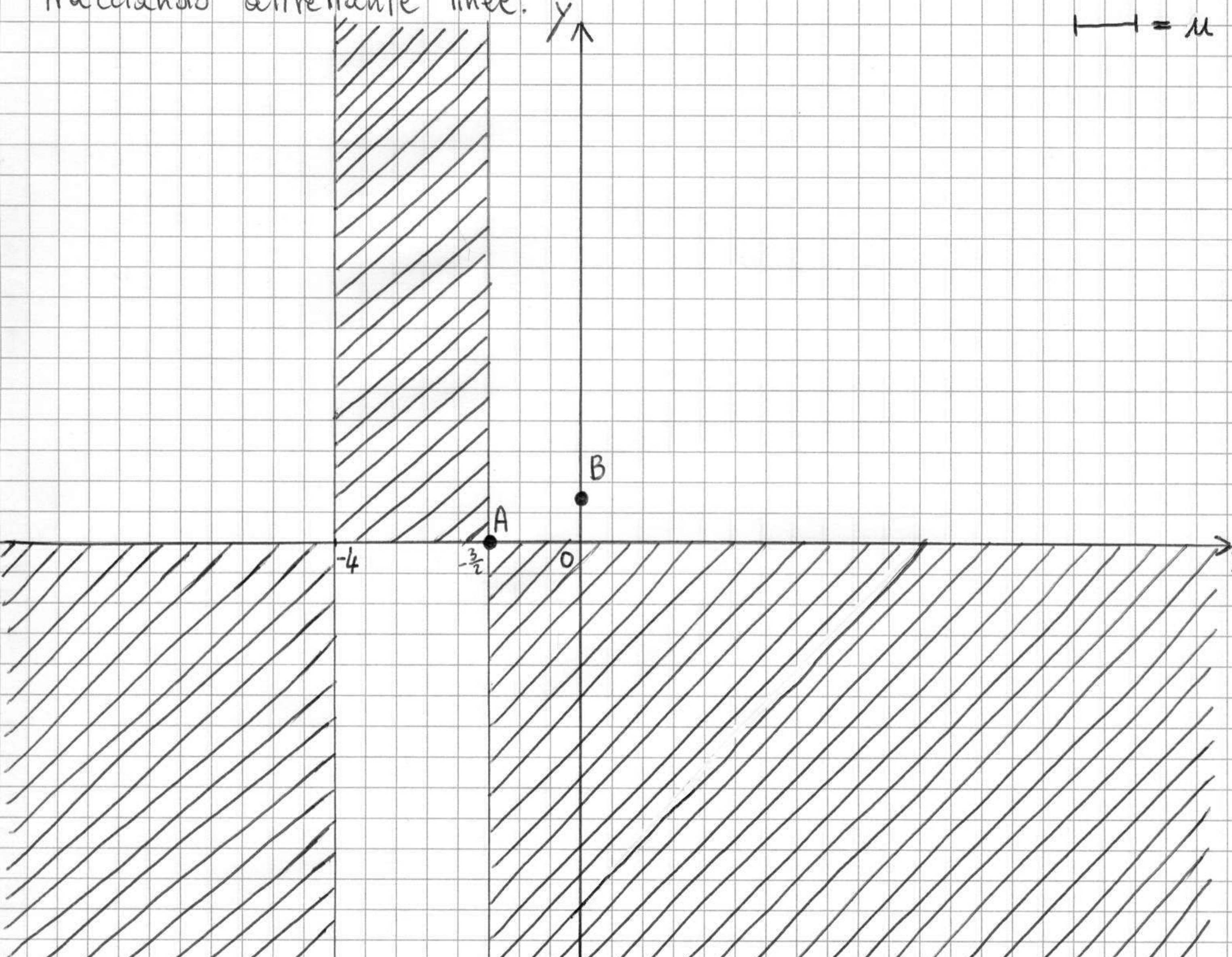
$+$: f(x) positiva

$-$: f(x) negativa

$f(x) > 0 \quad \forall x \in \left]-\infty; -4\right[\cup \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

$f(x) < 0 \quad \forall x \in \left]-4; -\frac{3}{2}\right[$

A questo punto, posso iniziare una prima rappresentazione grafica della funzione, riportando i punti che intersecano i due assi, tracciando una linea verticale in corrispondenza del punto escluso dal campo di esistenza $(x \neq -4)$ e riempiendo le aree del piano cartesiano nelle quali la funzione non esiste, tracciando altrettante linee.



5) RICERCA DEGLI ASINTOTI DELLA FUNZIONE

L'asintoto e' per definizione una retta che tende ad essere tangente ad una curva all'infinito.
Esistono tre tipi di asintoto: orizzontale, verticale ed obliquo.

- Asintoto orizzontale

L'asintoto orizzontale e' una retta parallela all'asse x, del tipo $y = c$ (c e' un valore finito).
Si ottiene calcolando il limite per x tende ad infinito (sia da destra che da sinistra) della funzione:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} c \Rightarrow y=c \text{ e' asintoto orizzontale} \\ \infty \Rightarrow \text{Non esiste asintoto orizzontale} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} c \Rightarrow y=c \text{ e' asintoto orizzontale} \\ \infty \Rightarrow \text{Non esiste asintoto orizzontale} \end{cases}$$

Percio':

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x+4} = \frac{2(+\infty)+3}{+\infty+4} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

$\Downarrow$

Raccolgo la x

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(2+\overbrace{\tfrac{3}{x}}^{0})}{\cancel{x}(1+\underbrace{\tfrac{4}{x}}_{0})} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \boxed{y=2} \text{ e' Asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{x+4} = \frac{2(-\infty)+3}{-\infty+4} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}(2+\overbrace{\tfrac{3}{x}}^{0})}{\cancel{x}(1+\underbrace{\tfrac{4}{x}}_{0})} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow$$ Anche da $-\infty$ la funzione tende ad incontrare l'asintoto $y=2$

- <u>Asintoto verticale</u>

L'asintoto verticale è una retta parallela all'asse y, del tipo $x = x_0$, dove x_0 è un valore escluso dal campo di esistenza.
Si ottiene calcolando il limite per x tendente a x_0 (sia da destra che da sinistra) della funzione:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} \infty \Rightarrow x = x_0 \text{ è asintoto verticale} \\ c \Rightarrow \text{Non esiste asintoto verticale} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{cases} \infty \Rightarrow x = x_0 \text{ è asintoto verticale} \\ c \Rightarrow \text{Non esiste asintoto verticale} \end{cases}$$

Perciò:

$$\lim_{x \to -4^+} \frac{2x+3}{x+4} = \frac{2(-3{,}999)+3}{-3{,}999+4} = \frac{-7{,}998+3}{0{,}001} = \frac{-4{,}998}{0{,}001} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -4^-} \frac{2x+3}{x+4} = \frac{2(-4{,}001)+3}{-4{,}001+4} = \frac{-8{,}002+3}{-0{,}001} = \frac{-5{,}002}{-0{,}001} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x = -4}$ è asintoto verticale

A destra di -4 il ramo della curva andrà a $-\infty$, mentre a sinistra di -4 a $+\infty$; ciò riconferma la correttezza dello studio precedente, in quanto la curva non avrebbe potuto tendere a $+\infty$ da destra e $-\infty$ da sinistra, dove la funzione non esiste.

- <u>Asintoto obliquo</u>

L'asintoto obliquo è una retta del tipo $y = mx + q$:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} c \Rightarrow m = c \text{ e } y = mx + q \text{ è asintoto obliquo} \\ 0 \Rightarrow \text{Non esiste asintoto obliquo} \\ \infty \Rightarrow \text{Non esiste asintoto obliquo} \end{cases}$$

$$q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$

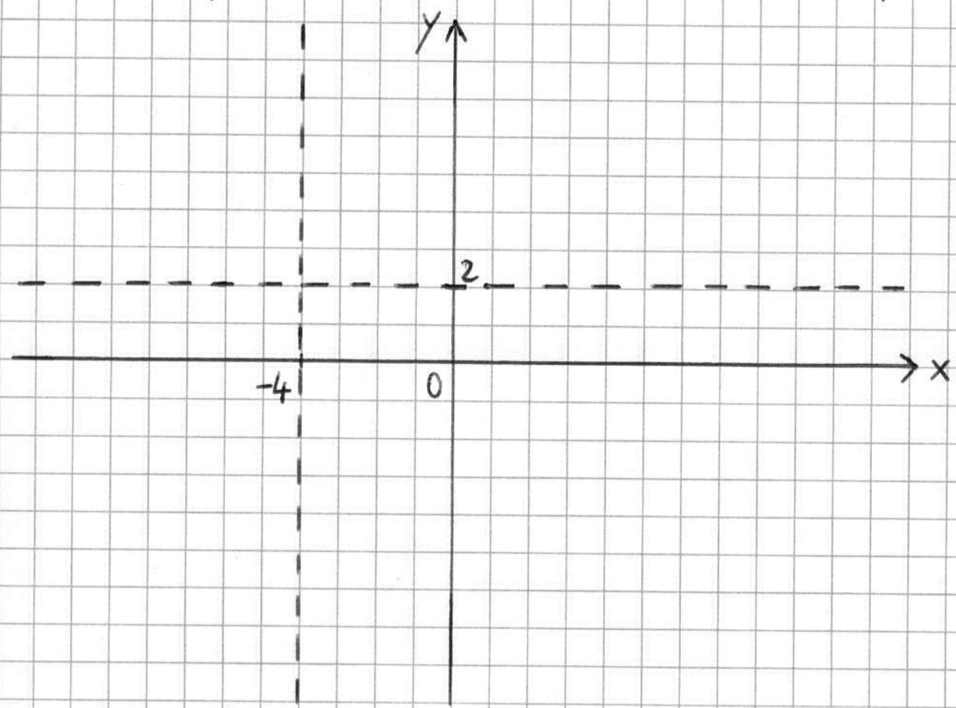
Perciò:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{x(x+4)} = \frac{\infty}{\infty} \; ; \; \lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{x^2+4x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{4}{x}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

Non esiste asintoto obliquo

Così si rappresentano i due asintoti della funzione:

H=u



6) CALCOLO DELLA DERIVATA PRIMA

$$y=\frac{2x+3}{x+4} \qquad y'=\left(\frac{2x+3}{x+4}\right)'=\frac{(2x+3)'(x+4)-(2x+3)(x+4)'}{(x+4)^2}=$$

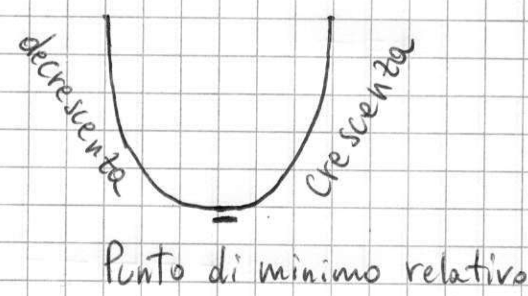
$$=\frac{2(x+4)-2x-3}{(x+4)^2}=\frac{\cancel{2x}+8-\cancel{2x}-3}{(x+4)^2}=\frac{5}{(x+4)^2}$$

7) STUDIO DI CRESCENZA E DECRESCENZA DELLA FUNZIONE E RICERCA DI EVENTUALI ESTREMI RELATIVI

Studiare dove la funzione cresce e decresce significa studiare la derivata prima:

- La funzione cresce dove la derivata prima è maggiore di 0
- La funzione decresce dove la derivata prima è minore di 0

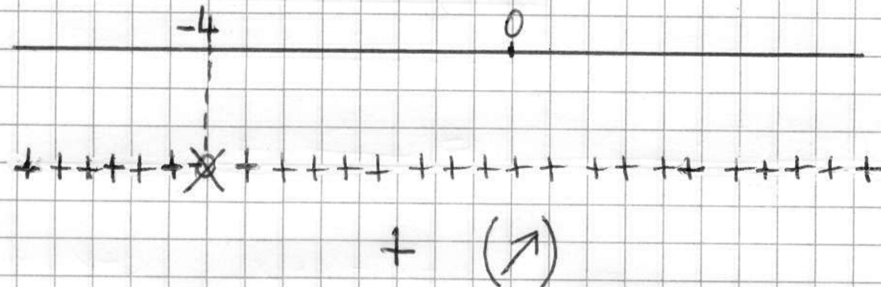
Se la derivata prima è uguale a 0, si avranno degli estremi relativi, di massimo o di minimo, le cui ordinate si troveranno sostituendo il valore dell'ascissa nella funzione.



$$\frac{5}{(x+4)^2} > 0$$

$(x+4)^2 > 0$; Il quadrato e' sempre maggiore di 0 tranne per il valore che annulla la base

$$x \neq -4 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-4\}$$



f(x) e' sempre crescente

$\Downarrow$

Non esistono punti di massimo e di minimo che annullano la derivata prima.

8) $\boxed{\text{CALCOLO DELLA DERIVATA SECONDA}}$

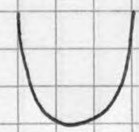
$$y' = \frac{5}{(x+4)^2} \qquad y'' = \left[\frac{5}{(x+4)^2}\right]' = \frac{(5)'(x+4)^2 - (5)\left[(x+4)^2\right]'}{\left[(x+4)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{0 \cdot (x+4)^2 - 10(x+4)}{(x+4)^4} = \frac{-10x - 40}{(x+4)^4}$$

9) **STUDIO DI CONCAVITA' E CONVESSITA' DELLA FUNZIONE E RICERCA DI EVENTUALI PUNTI DI FLESSO**

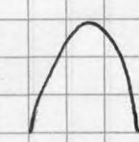
Per studiare la concavità e la convessità della funzione bisogna studiare la derivata seconda:

La funzione rivolge concavità verso l'alto dove la derivata seconda è maggiore di 0:



$f''(x) > 0 \Rightarrow$ Concavità verso l'alto

La funzione rivolge concavità verso il basso dove la derivata seconda è minore di 0:



$f''(x) < 0 \Rightarrow$ Concavità verso il basso (o Convessità)

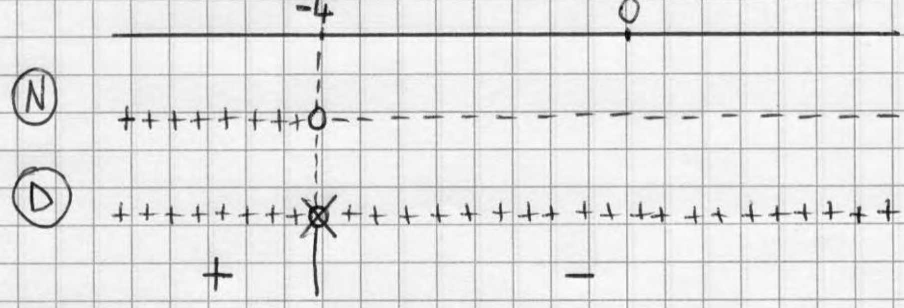
I punti di flesso sono i punti che annullano la derivata seconda, che possono essere ascendenti o discendenti

$f''(x) = 0 \Rightarrow$ Punto di flesso

$$\frac{-10x-40}{(x+4)^4} > 0$$

(N) $-10x-40>0$; $-10x>40$; $x<-\frac{40}{10}$; $x<-4$

(D) $(x+4)^4>0$; $x+4\neq 0$; $x\neq -4$ $\forall x \in \mathbb{R}-\{-4\}$



$f(x)$ rivolge concavità verso l'alto $\forall x \in]-\infty;-4[$

$f(x)$ rivolge concavità verso il basso $\forall x \in]-4;+\infty[$

La funzione non ammette punti di flesso, in quanto il punto $x=-4$ e' escluso dal campo di esistenza.

10) $\boxed{\text{GRAFICO}}$