Liceo Scientifico

“Leonardo da Vinci”

Francesco Caracciolo La Grotteria

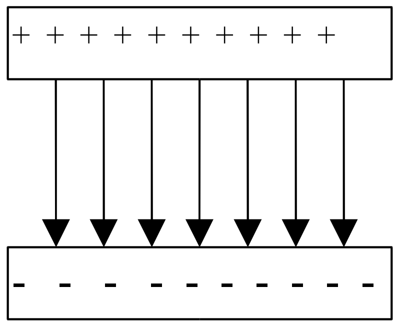
V H 2004/2005

“Elementi di cinematica ed elettromagnetismo”

1. Moto di una particella inserita in un campo elettrico: moto parabolico
2. Moto di un proiettile: altro esempio di moto parabolico
3. Forza di Lorentz
4. Moto di una particella inserita in un campo magnetico: moto rettilineo uniforme e moto circolare uniforme

Moto di una particella inserita in un campo elettrico

Si considerino due armature metalliche, di cui una caricata positivamente e l'altra negativamente. Tra di esse si crea un campo elettrico, espresso dalle linee di forza di campo elettrico, come in figura:

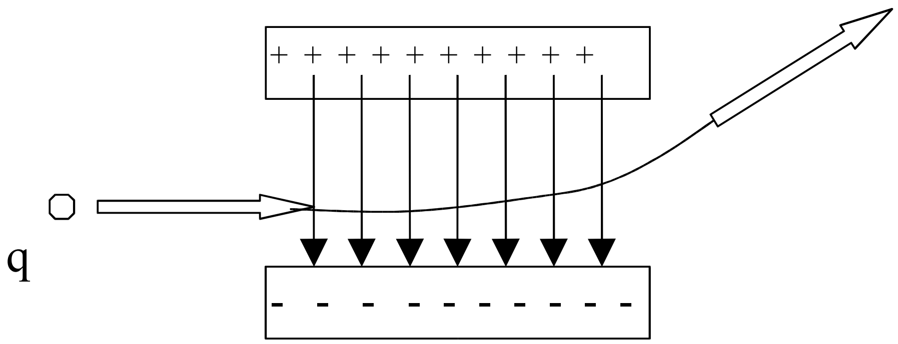


Il vettore Campo Elettrico è dato dalla relazione $E = F/q$

Si immagini di introdurre all'interno delle linee di forza di campo elettrico una particella q influenzabile, carica oppure neutra; laddove la particella fosse neutra, si caricherebbe per induzione elettrostatica.

Il moto iniziale di q è rettilineo uniforme, ma nel momento in cui essa entra a contatto con il campo elettrico E, il suo movimento muta in senso curvilineo. Quindi la particella uscirà dal campo elettrico e riprenderà il suo moto iniziale rettilineo uniforme.

Si voglia studiare la natura di tale moto curvilineo, il quale può essere scisso in due componenti, una lungo l'asse x e l'altra lungo l'asse y.
Si ipotizzi una situazione come in figura:



Si otterrà dunque un sistema di questo tipo:

$$\begin{cases} x = v_0 * t \\ y = \frac{1}{2} * a * t^2 \end{cases}$$

dove v_0 è la velocità iniziale della particella

$F = E * q$
$F = m * a$ (Seconda legge di Newton)

$F = F$
$E * q = m * a$, da cui $a = (E * q) / m$

$$\begin{cases} t = x / v_0 \\ y = \frac{1}{2} [(E * q)/ m] * (x^2/v_0^2) \end{cases}$$

Si ricava t e lo si sostituisce all'equazione in y. Si sostituisce a con il valore precedentemente trovato.

Si avrà dunque:

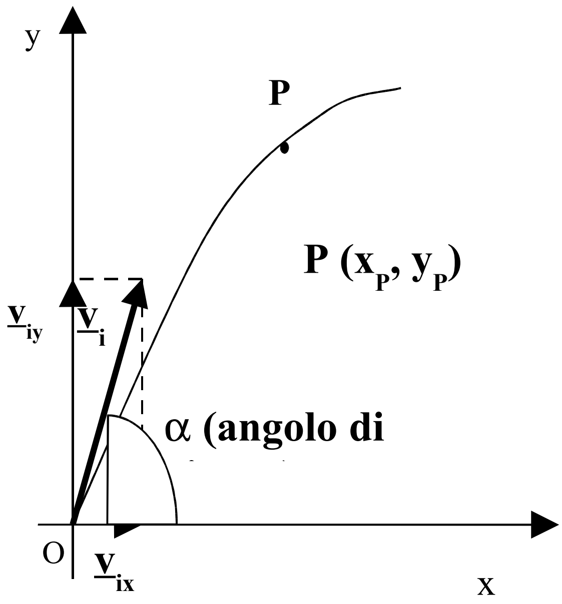
$$y = \frac{1}{2} [(E * q)/ m] * (x^2/v_0^2),$$

che è un'equazione del tipo

$y = kx^2$: tale equazione rappresenta una parabola. Si dedurrà che il moto di una particella inserita in un campo elettrico sarà un moto a traiettoria parabolica.

Moto di un proiettile

Si consideri il moto di un proiettile, il quale si muove con velocità iniziale $v_{i.}$ Si ipotizzi che esso sia scagliato dal punto (0,0), ossia l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali 0,x,y, come in figura:


y
P
P (x_P, y_P)
$\underline{v}_{iy}$
$\underline{v}_i$
α (angolo di
O
$\underline{v}_{ix}$
x

La velocità iniziale del proiettile può essere scomposta lungo due componenti: per cui è possibile scomporre il moto stesso in due differenti moti, uno lungo l'asse x e l'altro lungo l'asse y.

Il moto lungo l'asse delle ascisse, sarà un moto rettilineo uniforme, la cui equazione oraria è data dalla relazione
$x = v_{ix} * t$.

Il moto lungo l'asse y sarà invece un moto uniformemente accelerato, in cui l'accelerazione sarà pari a –g: infatti il proiettile tenderà a muoversi verso l'alto, mentre invece g, l'accelerazione gravitazionale, agisce verso il basso. La sua equazione oraria sarà

$$y = (v_{iy} * t) - \frac{1}{2} gt^2$$

Si otterrà dunque un sistema di questo tipo:

$$\begin{cases} x = v_{ix} * t \\ y = (v_{iy} * t) - \frac{1}{2} g * t^2 \end{cases}$$

Dalla relazione fra gli elementi di un triangolo rettangolo è possibile ricavare v_{ix} e v_{iy}.

$v_{ix} = v_i * \cos\alpha$

$v_{iy} = v_i * \text{sen}\alpha$.

$$\begin{cases} x = v_i * \cos\alpha * t \\ y = (v_i * \text{sen}\alpha * t) - \frac{1}{2} g * t^2 \end{cases}$$

Si ricava t dalla prima relazione:
$t = x / (v_i * \cos\alpha)$.
Si sostituisce t nella seconda equazione:

$$y = [(v_i * \text{sen}\alpha) * (x / v_i * \cos\alpha)] - \frac{1}{2} g * [(x^2 / (v_i^2 * \cos^2\alpha)]$$

Semplificando rispetto a v_i e considerando che $\text{sen}\alpha / \cos\alpha = \text{tg}\alpha$, dopo una serie di passaggi algebrici, si avrà che:

$$y = x * \text{tg}\alpha - [(g * x^2) / (2 v_i^2 * \cos^2\alpha)]$$

$$y = x * \text{tg}\alpha - [(g * x^2) * (\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) / (2 v_i^2 * \cos^2\alpha)]$$

$$y = x * \text{tg}\alpha - [(g * x^2 * \text{sen}^2\alpha) + (g * x^2 * \cos^2\alpha)] / (2 v_i^2 * \cos^2\alpha)$$

$$y = x * \text{tg}\alpha - [(g * x^2 * \text{sen}^2\alpha) / (2 v_i^2 * \cos^2\alpha)] - [(g * x^2 * \cos^2\alpha) / (2 v_i^2 * \cos^2\alpha)]$$

$$y = x * \text{tg}\alpha - [(g * x^2) / (2 v_i^2)] * \text{tg}^2\alpha - [(g * x^2) / (2 v_i^2)]$$

Ordinando rispetto a $\text{tg}\alpha$, si avrà un'equazione del tipo:

$$[(g * x^2) / (2 v_i^2)] * \text{tg}^2\alpha - x * \text{tg}\alpha + [(g * x^2) / (2 v_i^2)] + y = 0$$

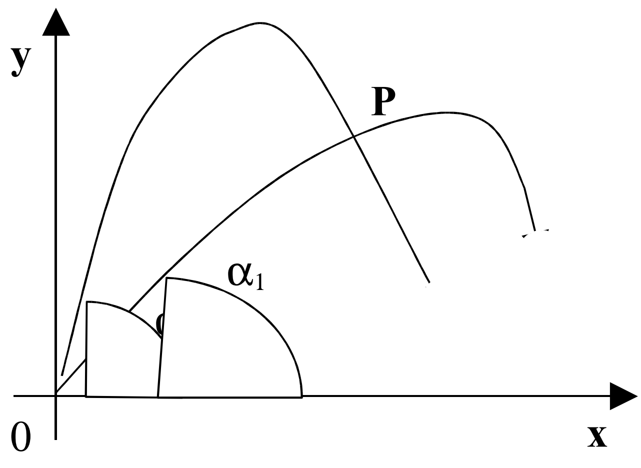
Sostituendo a x e y le coordinate note del punto P (x_P, y_P), si otterra:

$$[(g * x_P^2) / (2 v_i^2)] * \text{tg}^2\alpha - x_P * \text{tg}\alpha + [(g * x_P^2) / (2 v_i^2)] + y_P = 0,$$

ossia un'equazione parabolica di secondo grado in tgα del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Questo significa si troveranno due valori di tgα, ossia si troveranno due differenti valori dell'angolo di gittata, cioè α_1 e α_2. Dunque il punto P, le cui coordinate soddisfano l'equazione, può essere raggiunto per traiettoria diretta (α_1) o indiretta (α_2).



Si è dimostrato che il moto di un proiettile è un tipo di moto a traiettoria parabolica.
E’ necessario tenere presente che, in tutti i calcoli effettuati, si è trascurata la resistenza e l’attrito che l’aria esercitano sul proiettile.

Forza di Lorentz

La forza di Lorentz è la forza del vettore $\underline{B}$ su una particella carica q che si muove di velocità $\underline{v}$. Per cui Lorentz studia il reciproco rapporto fra campo elettrico e campo magnetico.

Si considerino finiti o infiniti vettori $\underline{B}$ perpendicolari alla superficie del piano (del foglio) e un filo conduttore percorso da corrente parallelo al piano (del foglio), come in figura:

X X X X X X

X X X X X X

Secondo la Forza di Lorentz, si avrà: $\underline{F} = q\underline{v} \wedge \underline{B}$

Il modulo di $\underline{F}$ sarà dato dal prodotto $q * v * B * \operatorname{sen}\alpha$, dove α è l'angolo formato dal vettore $\underline{v}$ e il vettore $\underline{B}$.
La direzione di $\underline{F}$ sarà perpendicolare al piano individuato da $\underline{v}$ e $\underline{B}$.
Il verso di $\underline{B}$ si otterrà attraverso la regola della mano destra.

Moto di una particella inserita in un campo magnetico

Si consideri una particella carica q che si muove all'interno di un campo magnetico. Si vogliano studiare i due casi particolari in cui la direzione secondo cui si muove q sia parallela e perpendicolare al vettore campo magnetico $\underline{B}$.

1. Nel caso in cui la particella carica q si muova secondo una direzione parallela al campo magnetico $\underline{B}$, avremo che $\underline{v}_q$, cioè la velocità della particella, sarà parallela a B. Per cui tali vettori genereranno un angolo di 0°. Si voglia trovare la Forza di Lorentz, data dalla relazione:
$\underline{F} = q\underline{v} \wedge \underline{B}$. In questo caso, avremo che il modulo sarà:
$F = q * v_q * B * \text{sen}\alpha$.
Poiché $\alpha = 0°$ e $\text{sen}0° = 0$,
F sarà nulla.
Si consideri la seconda legge di Newton, $F = m * a$.
Avremo che, se $F = 0$ (Forza di Lorentz), anche $m * a = 0$.
Poiché la massa dev'essere necessariamente diversa da zero, si avrà dunque che l'accelerazione a sarà nulla. Questo significa che si avrà un moto rettilineo uniforme di velocità v_q. Per cui, una particella carica che si muove all'interno di un campo magnetico secondo una direzione parallela al vettore campo magnetico, si muove di moto rettilineo uniforme.

2. Nel caso in cui la particella carica q si muova secondo una direzione perpendicolare al vettore campo magnetico B, si osserva sperimentalmente che essa si muoverà di moto circolare uniforme. Poiché v_q sarà perpendicolare a B, si avrà che $\alpha = 90°$. Considerando che sen90° = 1, la Forza di Lorentz avrà un valore pari a $q * v_q * B$. Si osserva inoltre che la Forza di Lorentz riuscirà a cambiare solo la direzione di v_q, ma non il suo modulo.
V_q sarà dunque la la velocità tangenziale (istantanea) del moto circolare uniforme.

Si voglia calcolare adesso il raggio di tale moto circolare. Si faccia riferimento all'accelerazione centripeta, data dalla relazione:
$a_c = v_q^2 / r$.
Come detto, la Forza di Lorentz sarà $F = q * v_q * B$.
Per la seconda legge di Newton, si avrà invece $F = m * a_c$.
Se F = F, si otterrà:
$q * v_q * B = m * a_c$.
Sostituendo il valore di a_c precedentemente trovato, si otterrà:
$q * v_q * B = m * (v_q^2 / r)$.
Semplificando rispetto a v_q e ricavando r, si avrà:

$$r = (m * v_q) / (q * B),$$

che rappresenta il raggio della circonferenza del moto circolare uniforme.

Si voglia ora calcolare la velocità angolare ω, ossia la variazione angolare rispetto all'unità di tempo. Si faccia riferimento alla relazione:

$$\omega = v_q / r.$$

Sostuendo il valore di r precedentemente trovato, si otterrà:

$$\omega = v_q * (q * B) / (m * v_q).$$

Semplificando rispetto a v_q, si avrà:

$$\omega = (q * B) / m$$

Si voglia ricavare adesso la frequenza di rivoluzione della particella p, ossia il numero di giri effettuati nell'unità di tempo, data dalla relazione $f = \omega / 2\pi$.
Sostituendo il valore di ω precedentemente trovato, si otterrà:

$$f = (q * B) / (2\pi * m)$$

L'unità di misura della frequenza f sarà l'Hertz (s^{-1})

Per ottenere il periodo, ossia il tempo necessario per effettuare un giro di circonferenza, si utilizza l'equazione $T = 1 / f$, da cui

$$T = (2\pi * m) / (q * B)$$