

TEORIA DELL'INCERTEZZA

prof. Francesco Zumbo

www.francescozumbo.it

email: zumbo2008@yahoo.it

1. GENERALITÀ

L'uomo non può misurare con perfezione alcun oggetto o alcuna entità fisica, per gli errori sistematici, per le riproduzioni non perfette dei campioni delle unità di misura, perché è impossibile tarare perfettamente gli strumenti di misura, ed anche per eventuali errori accidentali. Per tali motivi ha creato la **teoria dell'incertezza**, al fine di conoscere l'intervallo di errore che si commette.

Non potendo determinare il valore della perfetta misura, effettuiamo delle "misurazioni" con gli strumenti di misura che abbiamo a disposizione.

Siano

$$(1.1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

n – misurazioni, della stessa grandezza a , chiamiamo **Valore Medio** \bar{a} la media aritmetica delle misurazioni.

$$(1.2) \quad \bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

se, ad esempio, fossero 3 le misurazioni a_1, a_2, a_3 si avrebbe

$$(1.3) \quad \bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$$

Tra tutte le misurazioni quella che ha il valore più grande la chiamiamo a_{max} mentre quella che ha il valore più piccolo la chiamiamo a_{min} .

2. ERRORE MASSIMO O INCERTEZZA, DELLE MISURAZIONI DI a

Definiamo **Errore Massimo** o **Incertezza** la quantità

$$(2.1) \quad E_{max}(a) = I(a) = \Delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2}$$

si osserva che l'incertezza non é la media tra il valore massimo e il valore minimo delle misurazioni, se cosí fosse stato avremmo avuto al numeratore $a_{max} + a_{min}$ invece nella formula c' é il " - " .

Definiamo **Incertezza relativa** $E_r(a)$ il rapporto tra l'incertezza Δa e il valore medio delle misurazioni \bar{a} .

$$(2.2) \quad E_r(a) = \frac{\Delta(a)}{\bar{a}}$$

Definiamo **Incertezza Percentuale**

$$(2.3) \quad E_{\%}(a) = (E_r(a) \cdot 100)\%$$

Con tali definizioni siamo certi che, se avessimo la possibilitá di conoscere la reale misura a di una grandezza cui abbiamo rilevato mediante le misurazioni a_1, a_2, \dots, a_n di certo tale misura sarebbe dentro l'intervallo

$$[\bar{a} - \Delta a ; \bar{a} + \Delta a]$$

3. L'INCERTEZZA IN ALCUNE OPERAZIONI ELEMENTARI

Incertezza della somma:

$$\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b$$

essa é data dalla somma delle incertezze delle singole misurazioni.

Incertezza della differenza:

$$\Delta(a - b) = \Delta a + \Delta b$$

da notare che l'incertezza della somma é uguale all'incertezza della differenza.

Incertezza del prodotto:

$$\Delta(a \cdot b) = \bar{a} \cdot \bar{b} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right)$$

Incertezza del quoziente:

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \cdot \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)$$

É fondamentale ricordare che se dobbiamo calcolare le seguenti operazioni dobbiamo utilizzare:

Per la somma

$$a + b$$

$$(3.1) \quad a + b = \bar{a} + \bar{b} \pm \Delta(a + b) = \bar{a} + \bar{b} \pm (\Delta a + \Delta b)$$

Cioé

$$(3.2) \quad a + b = \bar{a} + \bar{b} \pm (\Delta a + \Delta b)$$

Se dobbiamo calcolare la differenza $a - b$

$$(3.3) \quad a - b = \bar{a} - \bar{b} \pm \Delta(a - b) = \bar{a} - \bar{b} \pm (\Delta a + \Delta b)$$

Cioé

$$(3.4) \quad a - b = \bar{a} - \bar{b} \pm (\Delta a + \Delta b)$$

Se dobbiamo calcolare il prodotto $a \cdot b$

$$(3.5) \quad a \cdot b = \bar{a} \cdot \bar{b} \pm \Delta(a \cdot b) = \bar{a} \cdot \bar{b} \pm \bar{a} \cdot \bar{b} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)$$

Cioé

$$(3.6) \quad a \cdot b = \bar{a} \cdot \bar{b} \pm \bar{a} \cdot \bar{b} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)$$

se dobbiamo calcolare il rapporto

$$\frac{a}{b}$$

$$(3.7) \quad \frac{a}{b} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \pm \Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \pm \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)$$

Cioé

$$(3.8) \quad \frac{a}{b} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \pm \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)$$

4. ESERCIZIO

Si sono svolte 3 misurazioni della grandezza **a** e 3 misurazioni della grandezza **b**:

Le misurazioni della grandezza **a** sono:

$$a_1 = 26.3$$

$$a_2 = 26.5$$

$$a_3 = 26.9$$

Quelle della grandezza **b** sono :

$$b_1 = 57,3$$

$$b_2 = 57,5$$

$$b_3 = 58,02$$

Calcolare: il valore medio, l'incertezza delle grandezze a e b , l'incertezza relativa, e svolgere le seguenti operazioni : $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, a/b .

Svolgimento:

Iniziamo calcolando il valore medio di a e di b

$$(4.1) \quad \bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{26.3 + 26.5 + 26.9}{3} = 26.57$$

$$(4.2) \quad \bar{b} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} = \frac{57.3 + 57.5 + 58.2}{3} = 57.67$$

Calcoliamo l'incertezza delle misurazioni della grandezza **a**

$$(4.3) \quad \Delta(a) = \frac{a_{max} - a_{min}}{2} = \frac{26.9 - 26.3}{2} = 0.3$$

In definitiva

$$(4.4) \quad \Delta(a) = 0.3$$

Calcoliamo l'incertezza delle misurazioni della grandezza **b**

$$(4.5) \quad \Delta(b) = \frac{b_{max} - b_{min}}{2} = \frac{58.02 - 57.3}{2} = 0.36$$

In definitiva

$$(4.6) \quad \Delta(b) = 0.36$$

Calcoliamo l'incertezza relativa delle misurazioni di **a**

$$(4.7) \quad E_r(a) = \frac{\Delta(a)}{\bar{a}} = \frac{0.3}{26.57} = 0.113$$

Calcoliamo l'incertezza percentuale delle misurazioni di **a**

$$(4.8) \quad E_{\%}(a) = (E_r(a) \cdot 100)\% = 11.3\%$$

Calcoliamo l'incertezza relativa delle misurazioni di **b**

$$(4.9) \quad E_r(b) = \frac{\Delta(b)}{\bar{b}} = \frac{0.36}{57.67} = 0.00624$$

Calcoliamo l'incertezza percentuale delle misurazioni di **b**

$$(4.10) \quad E_{\%}(b) = (E_r(b) \cdot 100)\% = 0.6\%$$

Calcoliamo adesso $a + b$

$$(4.11) \quad \begin{aligned} a + b &= \bar{a} + \bar{b} \pm \Delta(a + b) = \bar{a} + \bar{b} \pm (\Delta a + \Delta b) = \\ &= (26.57 + 57.67) \pm (0.3 + 0.36) = 84.24 \pm 0.66 \end{aligned}$$

Cio' é

$$(4.12) \quad a + b = 84.24 \pm 0.66$$

Calcoliamo $a - b$

$$(4.13) \quad \begin{aligned} a - b &= \bar{a} - \bar{b} \pm \Delta(a - b) = \bar{a} - \bar{b} \pm (\Delta a + \Delta b) = \\ &= (26.57 - 57.67) \pm (0.3 + 0.36) = -31.1 \pm 0.66 \end{aligned}$$

$$(4.14) \quad a - b = -31.1 \pm 0.66$$

Calcoliamo adesso il prodotto $a \cdot b$

$$(4.15) \quad a \cdot b = \bar{a} \cdot \bar{b} \pm \bar{a} \cdot \bar{b} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 26.57 \cdot 57.67 \pm 26.57 \cdot 57.67 \left(\frac{0.3}{26.57} + \frac{0.36}{57.67} \right) = \\
&= 1532.29 \pm 1532.29 (0.01129 + 0.00624) = 1532.29 \pm 1532.29 (0.01753) = \\
&= 1532.29 \pm 26.86
\end{aligned}$$

In definitiva

$$(4.16) \quad a \cdot b = 1532.29 \pm 26.86$$

Calcoliamo il quoziente

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b} \\
(4.17) \quad \frac{a}{b} &= \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \pm \Delta \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \pm \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right) = \\
&= \frac{26.57}{57.67} \pm \frac{26.57}{57.67} (0.01753) = \\
&= 0.4607 \pm 0.008077
\end{aligned}$$

Cioé

$$(4.18) \quad \frac{a}{b} = 0.4607 \pm 0.008077$$